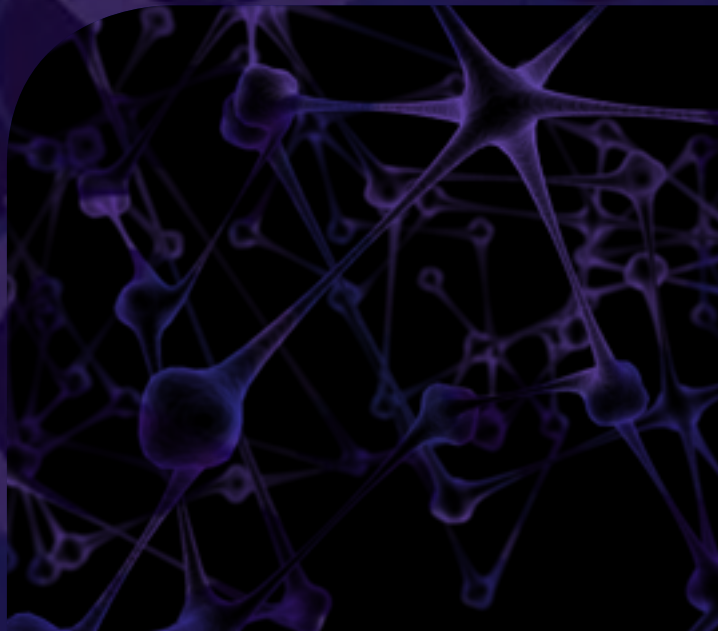




# El modelamiento matemático en la formación del ingeniero



**Grupos de investigación**  
Kishurim, Tecnice, Tecnimat,  
Griduc, Gidsaw, Cognitek



# **El modelamiento matemático en la formación del ingeniero**



# El modelamiento matemático en la formación del ingeniero

Grupos de Investigación

Kishurim

Tecnice

Tecnimat

Griduc

Gidsaw

Cognitek



Editor

Luis Facundo Maldonado Granados



Una publicación de la Universidad Central, Universitaria de Investigación y Desarrollo, Universidad Pedagógica Nacional, Universidad Hebrea de Jerusalén, con el auspicio del Ministerio de Educación Nacional de Colombia (Contrato IF007-2011).

Título: *El modelamiento matemático en la formación del ingeniero*

ISBN para PDF: 978-958-26-0280-2

Primera edición: 2013

Proyecto: “Red de modelamiento y representación formal en matemáticas”

Grupos de Investigación: Kishurim, Tecnice, Tecnimat, Griduc, Gidsaw y Cognitek

Editor: Luis Facundo Maldonado Granados

Ediciones Universidad Central

Carrera 5 N.º 21-38. Bogotá D. C., Colombia

Teléfono: 334 49 97. PBX: 323 98 68, exts. 2353 y 2356.

editorial@ucentral.edu.co

#### Catalogación en la Publicación Universidad Central

El modelamiento matemático en la formación del ingeniero/ editor Luis Facundo Maldonado Granados. -- Bogotá : Ediciones Universidad Central, 2013.

206 páginas ; 24 cm.

Grupos de Investigación Kishurim Tecnice Tecnimat Griduc Gidsaw Cognitek.

ISBN de PDF: 978-958-26-0280-2

1. Matemáticas para ingenieros 2. Modelos matemáticos 3. Modelos de simulación

4. Innovaciones educativas – modelos matemáticos I. Maldonado Granados,

Luis Facundo, editor II. Universidad Central

620.00151 –dc23

PTBUC/RVP

#### PRODUCCIÓN EDITORIAL

##### Departamento de Comunicación y Publicaciones

Dirección: Edna Rocío Rivera P.

Coordinación editorial: Héctor Sanabria R.

Diseño y diagramación: Claudia Camargo

Corrección de textos: Ómar León C.



Publicado bajo licencia  
Creative Commons 4.0  
Internacional

Editado en Colombia - Published in Colombia

# Contenido

<b>Introducción</b> .....	9
Capítulo 1	
<b>Visión del modelamiento a partir de la historia de los objetos</b> .....	19
Introducción .....	19
Modelamiento en la civilización antigua .....	20
Modelamiento en Grecia y Roma .....	22
Modelamiento en el Renacimiento .....	24
Modelamiento en la sociedad industrial .....	28
Modelamiento en la sociedad de la información .....	28
Conclusión .....	30
Referencias .....	31
Capítulo 2	
<b>Validación de modelos desde la perspectiva epistemológica</b> .....	33
Síntesis .....	33
Introducción .....	33
Conocimiento desde el modelado y simulación .....	36
Validación en modelado y simulación .....	46
Referencias .....	52
Capítulo 3	
<b>El modelamiento en economía</b> .....	55
Introducción .....	55
Una cuestión de importancia .....	56
El papel de los modelos en la ciencia económica .....	58
¿Qué es lo que se simplifica? .....	59
Elementos propios, a veces comparables .....	60
Modelos no necesariamente dinámicos .....	61
“Mientras no cambien otras cosas” .....	63
Aplicabilidad general, versatilidad .....	64
Tipos de modelos .....	65
Antecedentes económicos de la clasificación adoptada .....	65
Modelos como fuente y resultado de inspiración .....	67
Uso, valor y limitaciones de los modelos .....	68
Uso y valor de los modelos .....	69
Limitaciones o riesgos en el uso de modelos .....	70
Conclusiones, énfasis y prioridades .....	70
Referencias .....	71

## Capítulo 4

<b>La espiral en la formación de la competencia de modelado</b> .....	75
Introducción .....	75
La competencia de modelamiento .....	79
Visión cognitiva del modelamiento .....	81
Formas de representación y desarrollo de la competencia de modelamiento .....	81
Conclusiones .....	95
Referencias .....	95

## Capítulo 5

<b>La representación verbal en el desarrollo de la competencia de modelamiento matemático</b> .....	97
Introducción .....	97
Antecedentes y marco conceptual .....	98
Metodología .....	101
Referencias .....	113

## Capítulo 6

<b>La representación algebraica en la formación de competencias de modelamiento matemático</b> .....	115
Introducción .....	115
Antecedentes .....	115
Metodología .....	118
Conclusiones .....	127
Referencias .....	129

## Capítulo 7

<b>La diagramación en el desarrollo de la competencia de modelado matemático</b> .....	131
Introducción .....	131
Antecedentes .....	132
Enfoque metodológico .....	136
Resultados .....	139
Discusión y conclusiones .....	143
Recomendaciones y trabajo futuro .....	144
Referencias .....	145
Apéndice .....	147

## Capítulo 8

<b>Representación computacional y desarrollo de la competencia de modelamiento</b> .....	149
Introducción .....	149
Antecedentes .....	150



Marco conceptual .....	156
Metodología .....	158
Análisis de datos y resultados .....	163
Análisis particular del caso Modelamiento y Simulación .....	168
Conclusiones .....	169
Sugerencias .....	169
Referencias .....	170

## Capítulo 9

### **Comunidad web 2.0 para el desarrollo de competencias**

<b>matemáticas</b> .....	173
Introducción .....	173
Antecedentes .....	174
Propuesta de comunidad web 2.0 .....	177
Pilotaje de la comunidad 2.0 en el proyecto “Red de Modelamiento y Representación Formal en Matemáticas” .....	182
Conclusiones .....	193
Referencias .....	194

<b>Conclusiones</b> .....	197
---------------------------	-----



## Introducción\*



Luis Facundo Maldonado Granados\*\*

Construir modelos para resolver problemas complejos es un tema central en las formas de la ciencia contemporánea: mediante los modelos formales, la matemática genera interrelaciones con otras disciplinas y se relaciona con los problemas sensibles de la sociedad; a su vez, la informática y la inteligencia artificial han contribuido a que la ciencia enfrente problemas de creciente complejidad y a que la construcción de modelos sea de interés general.

Para la matemática, el creciente interés por los modelos marca un cambio de tendencia en la investigación; según Brwcka, Dix y Kolonige (1997), esta se caracteriza como paso del pensamiento deductivo (monótono) a la inducción (no-monótona). El pensamiento deductivo procede por información completa, contrario con lo que sucede con la mayoría de las inferencias de la vida diaria y del sentido común, caracterizadas por la información incompleta. Esta condición fue puesta de relieve por los investigadores de inteligencia artificial cuando abordaron la representación del conocimiento de sentido común y la solución de los correspondientes problemas de decisión.

La consideración de que las experiencias son la base del razonamiento llevó a formalizar la representación de las mismas organizadas por similitud y jerarquizadas por relevancia para generar heurísticas en la solución de problemas

---

\* Proyecto auspiciado por el Ministerio de Educación Nacional mediante el convenio IF007 suscrito con la Universidad Central y que, además, integra otras instituciones como la Universidad Hebrea de Jerusalén, Universitaria de Investigación y Desarrollo y la Universidad Pedagógica Nacional, con la dirección de Luis Facundo Maldonado. El proyecto fue elegido en la convocatoria abierta por Renata para conformar un banco de proyectos de investigación elegibles, en innovación educativa con uso de las tecnologías de la información y la comunicación durante el periodo 2011-2012.

\*\* Ph. D. y docente investigador del Departamento de Matemáticas de la Universidad Central e integrante del grupo de investigación Tecnice. Correo electrónico: lmaldonadog1@ucentral.edu.co

(Kolodner y Leak, 1997). Dos problemas que han motivado a que la matemática desarrolle modelos en interacción con la inteligencia artificial y otras disciplinas han sido la complejidad y la incertidumbre. Comprender y entender los procesos del mundo real a partir de la interacción entre múltiples componentes y predecir lo que puede pasar es una poderosa motivación para el desarrollo del conocimiento en la sociedad contemporánea. En este proceso, la matemática incorpora tanto los desarrollos algebraicos como la representación gráfica: por ejemplo, los desarrollos de la teoría de grafos se unen a los de la teoría de la probabilidad para el desarrollo de algoritmos eficientes, de propósito general (Jordan, 1999).

El interés en resolver problemas auténticos de la vida real mediante la construcción de modelos matemáticos es característico de la ciencia y de la tecnología de la sociedad contemporánea (Galbraith y Stillman, 2006). Este interés está estrechamente relacionado por la forma como los científicos conciben el papel de la ciencia frente al contexto físico, social e histórico. Los movimientos económicos y sociales de la sociedad industrial y de la sociedad de la información marcan cambios en la concepción del papel de la ciencia en la sociedad. La ciencia pasa de su concepción de perenne a perfectible; su papel de factor de formación de élite ideológica y política a ser factor de desarrollo económico y social; los entornos de desarrollos aislados de los problemas y necesidades se abren para estudiar de manera sistemática las variables del entorno. La naturaleza y complejidad de los problemas, la experticia históricamente construida, la organización de recursos —especialmente de información— y la formulación de problemas son factores que entran en la dinámica de construcción de modelos en contexto (Hoffman, Feltovich y Ford, 1997).

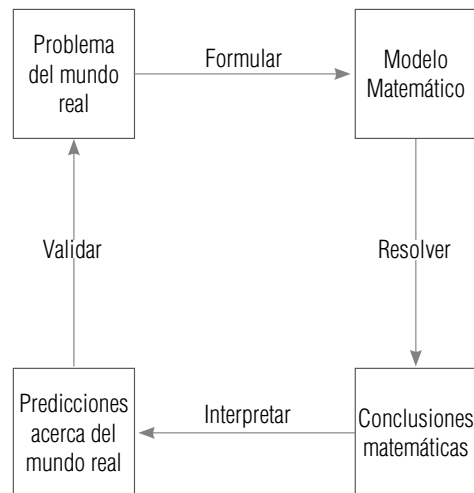
Este interés de las ciencias tiene repercusiones en los diferentes niveles de la educación. Kaiser, Blomhøj y Sriraman (2006) sostienen que en las últimas décadas la introducción del modelamiento matemático y de tecnología de la información son los factores más relevantes en las reformas curriculares de matemáticas alrededor del mundo. La sociedad del siglo XXI tiene nuevas expectativas acerca de la formación de habilidades de su juventud; varios estudios internacionales explicitan el interés por la formación de habilidades para resolver problemas de la vida real mediante modelos (OCDE, 2003); vale la pena resaltar de forma particular el Programa para la Evaluación Internacional de Alumnos (PISA) de la OCDE, y la importancia que le ha dado a las competencias de modelamiento (OCDE, 2007).

Con base en las consideraciones anteriores, podemos afirmar que la ciencia contemporánea tiene un interés dominante en construir modelos que permitan tanto comprender la dinámica de los sistemas como mejorar el control sobre los mismos; de igual manera, la educación se interesa por mejorar la ca-

pacidad de las personas para producir modelos como producto de su actividad científica.

Los estudios de neurociencia se han interesado en describir el sistema cognitivo de los seres vivos, particularmente el del ser humano. El cerebro actúa con base en organización de estructuras de neuronas; estas configuraciones explican procesos como la percepción. Las entradas de información al sistema sensorial activan configuraciones ya existentes por comparación de rasgos y hallazgo de similitudes, al tiempo que actúan modificando las estructuras ya existentes, ya sea consolidando su configuración o generando cambios en la estructura. El resultado es un modelo mental que representa el mundo de cada sujeto en momentos específicos. Estos modelos mentales son sistemas que permiten hacer inferencias sobre los cambios posibles en el entorno y las consecuencias para el mismo sujeto, y constituyen la base del comportamiento adaptativo de los agentes inteligentes. El modelo mental puede tener una especie de réplica de sí mismo en sistemas de símbolos físicos, como por ejemplo un diagrama o una fórmula algebraica (Holland et ál., 1986). En esta línea de pensamiento, el estudio sobre la competencia de modelamiento vincula la generación de dos modelos: uno mental y otro externo. Al modelo externo también se le ha denominado modelo conceptual.

El proceso de formar la competencia tiene su base esencial en el modelo mental y se externaliza en el modelo conceptual como producto. El modelo mental evoluciona en función de la experiencia perceptiva del entorno que los aprendices tienen cuando tratan de resolver problemas, por acción sobre ese entorno y por la información de retorno sobre el efecto de las acciones sobre el entorno. La experiencia puede ser directa del sujeto o por observación de otros sujetos que actúan —experiencia vicaria—. La base entonces de la formación de modelos mentales está esencialmente orientada a la solución de problemas; se manifiesta en reglas de acción que se modifican por información de retorno. Holland et ál. (1986) argumentan que la formación de esta clase de competencia se da como un conjunto complejo de elementos y que es muy difícil obtenerla



**Figura 1.** Proceso de modelado. Modelo propuesto por Brito-Vallina et ál. (2011, p. 130).

por componentes separados. La observación activa del entorno y el conocimiento previo que se almacenan en la memoria de largo plazo dan lugar a la interpretación o creencias acerca de la manera como se comporta el ambiente y constituye el modelo mental, el cual activa reglas de acción que son los mecanismos para regular la relación con el retorno. La proyección del modelo mental en alguna forma de lenguaje es propia del ser humano y constituye el modelo conceptual. Las ciencias se construyen como sistemas de modelos conceptuales que cumplen una función comunicativa, con la cual se entretrejen acciones colaborativas; estas pueden orientarse a actuar sobre el entorno y son base de regulación de los modelos mentales de los actores de la comunicación. La ciencia, en realidad, es la construcción colectiva que genera modelos mentales compartidos o “dialogantes” y modelos conceptuales; estos últimos, que constituyen el cuerpo visible de la ciencia, toman la forma de escritos u otras formas de lenguaje documentado.

Desde la perspectiva cognitiva, los pocos estudios sobre el desarrollo de la competencia de modelamiento muestran aproximaciones progresivas que probablemente consoliden movimientos en la formación del nivel profesional. La mayoría de estos trabajos se centra en el modelo conceptual y en su función social; se razona en términos del estado del conocimiento al que se ha llegado y se espera que los estudiantes se ubiquen en posición de estudiar y aprender de estos desarrollos que están contribuyendo a la solución de problemas actuales; además, se pretende que mediante este diálogo se pueda lograr mayor desarrollo.

Brito-Vallina et ál. (2011) parten de la concepción del proceso de modelado expresado en la estructura de la figura 1 y luego presentan un modelo de formación de estudiantes de ingeniería. En ambos casos, resaltan cuatro características: relación con el mundo real, estructura matemática, inferencia matemática y predicciones sobre el sistema modelado.

1. Definición del problema y de sus objetivos.
2. Definición de la teoría que gobierna el problema.
3. Descripción de la situación física en términos matemáticos.
4. Solución matemática del modelo.
5. Comparación del modelo con la situación real.
6. Estudio de las limitaciones del modelo.
7. Aplicación del modelo e interpretación de los resultados obtenidos.

**Figura 2.** Pasos en el proceso de modelado en la formación de estudiantes de ingeniería propuestos por Brito-Vallina et ál. (2011, p. 131).

El modelado se presenta como proceso teleológico; es decir, está concebido en un entorno de solución de problemas y se orienta al logro de objetivos coherentes con la solución de problemas. Establecida la teleología, se activa el proceso. El primer insumo es la identificación de una teoría o construcción de conocimiento de

la comunidad científica o sistema de creencias validado y documentado; a continuación, la descripción del entorno, sistema o entorno físico cumple el papel de la observación que activa la percepción; viene luego la solución matemática, que abstrae un sistema formal con relaciones entre sus elementos y operadores que garantizan la transformación de valores iniciales del sistema en los valores esperados del objetivo; la siguiente preocupación es valorar las limitaciones y prever las posibles generalizaciones. La figura 2 muestra los pasos propuestos por los autores.

De manera similar, Blomhøj y Højgaard Jensen (2003) identifican los siguientes subprocesos del modelamiento: formulación de una tarea en el dominio de conocimiento o búsqueda; selección de objetos relevantes y sus relaciones; traducción en una representación matemática; uso de las matemáticas para resolver el problema, e interpretación de resultados.

Blum y Borromeo (2009) señalan que en los debates sobre desarrollo curricular en matemáticas, el desarrollo de la competencia de modelado está presente como objetivo deseable, pero contrasta con las prácticas escolares más frecuentes, y esto prueba que modelar es una actividad difícil tanto para los estudiantes como para los profesores. Modelar es una tarea con exigencias cognitivas fuertes para quien la desarrolla y pone a prueba la relación entre la autonomía del estudiante y la asesoría al mismo. El apoyo a los estudiantes lo enfocan en una mejor comprensión del entorno, en la ayuda a la formación de conceptos, en la motivación, en la consolidación de memoria, en la formación de actitudes positivas y en la proyección de una imagen positiva de la matemática. Las dificultades más frecuentes se ubican en la selección de variables, la relación entre ellas para formar una estructura y su iniciación.

El proceso complejo de modelar integra procesos perceptivos, de razonamiento y de memoria a nivel del modelo mental, así como formas de representación a nivel de los modelos conceptuales. Los aportes que componen este libro abordan la formación de la competencia de modelado desde la perspectiva de la integración de formas de representación, de acuerdo con los componentes del desarrollo de los modelos.

Las representaciones múltiples son un tema de investigación que ha tomado importancia con el desarrollo de los sistemas hipermediales computarizados. Lesgold (1998) introduce un campo de investigación sobre la relación entre formas de representación y categorías de aprendizaje. Encuentra que hay relación entre formas de representación y niveles de abstracción, entre la comprensión de la estructura de sistemas o de las características de sus partes, y que también el desarrollo de analogías entre sistemas es facilitado por algunas formas de representación en contraste con otras.

Wang y Sun (2005), a partir de tres experimentos sobre la naturaleza de la representación y su ubicación en la memoria, concluye que marcos diferentes de representación se pueden utilizar para codificar relaciones espaciales entre objetos. Dependiendo de su dominancia, disponibilidad y validez, estas representaciones interactúan para determinar el desempeño de la memoria. En especial, las representaciones automáticamente codificadas y practicadas extensamente se convierten en dominantes y su disponibilidad mejora el desempeño cuando son válidas; cuando no lo son, las personas tienen que acudir a las menos dominantes, de tal manera que las representaciones dominantes y no válidas generan deterioro en el desempeño por la interferencia que producen. Si se eliminan estas representaciones, el desempeño mejora.

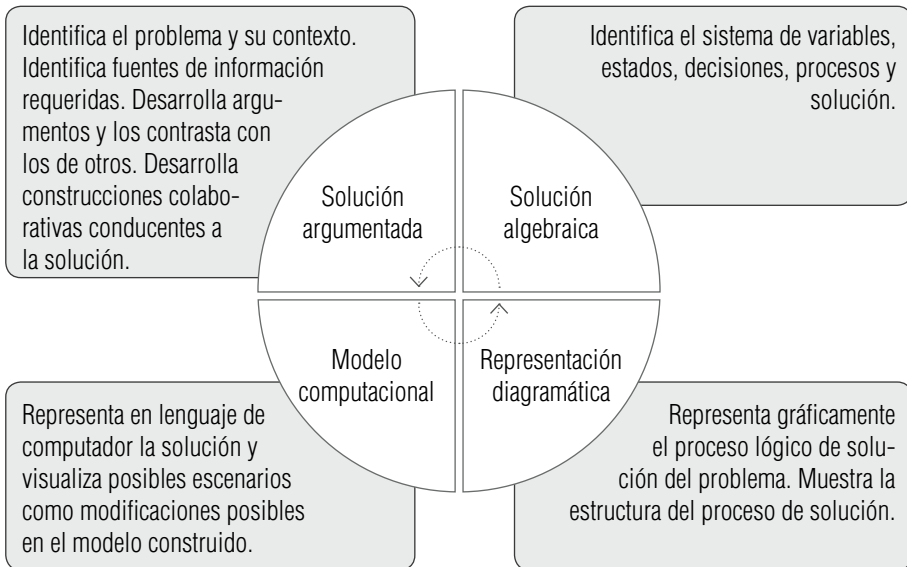
Moreno y Mayer (2011) comparan estudiantes que aprenden relaciones entre procedimientos y conceptos en aritmética mediante representaciones múltiples o representación única. En pruebas de rendimiento, los estudiantes de rendimiento superior, que tienen representaciones múltiples, obtienen resultados superiores a los obtenidos por quienes tienen una sola representación; los que trabajan con representaciones múltiples sacan más ventaja en problemas difíciles que en problemas fáciles, aprenden más rápido, generan menos errores de diferenciación y muestran mayor capacidad de producción, con la condición de que no haya sobrecarga de memoria.

Al revisar investigaciones en las cuales se estimula a los estudiantes a traducir representaciones de un formato a otro, Maldonado (2012) encontró que se genera mayor atención, mayor actividad de procesamiento y mejor retención en memoria de largo plazo.

El presente libro es el resultado de la ejecución de un proyecto en el cual experimentamos un escenario de representación múltiple para la formación de la competencia de modelado en cursos de matemáticas para ingeniería (figura 3). En primer lugar, se dispone un ambiente digital en línea para la participación sincrónica que estimula el análisis de contexto, la adquisición y organización de información y la búsqueda de alternativas a la solución de problemas de modelamiento. En segundo lugar, el proceso argumentativo motiva la estructuración algebraica de la solución en otro ambiente digital especializado. La primera forma de representación tiene riqueza de información contextual, la segunda se concentra en la selección de variables y en las relaciones entre las variables y genera la representación de un sistema de variables que se transforma mediante operadores matemáticos hasta encontrar una solución. En tercer lugar, la representación algebraica es insumo para la representación diagramática, en otro ambiente digital, que se concentra en la visión de conjunto del proceso de solución, dando como salida una visión de nivel más general que la solución algebraica y que permite fundamentar comparaciones analógicas y



estructurales y, por ende, facilita la transferencia. En cuarto lugar, la representación diagramática de la solución es insumo para la representación en lenguaje de computador, pues muestra el algoritmo de la solución. La representación computacional habilita el juego de escenarios y formas de razonamiento de la forma “si ... entonces ...”. Los modelos computacionales son base para extensiones de la solución a problemas estructuralmente similares (véase figura 3). Los capítulos en que está organizado este libro giran alrededor de este planteamiento y aspiran a alimentar la discusión interdisciplinaria sobre estrategias para formar la capacidad de modelar de los estudiantes de ingeniería en sus cursos de matemáticas. Una base incipiente para la extensión de esta experiencia y para la aplicación de sus corolarios a otras materias y disciplinas –por ejemplo, la capacidad de modelar en biología, ciencias del medio ambiente, ciencias sociales, etc.– surge naturalmente como contribución adicional de este estudio.



**Figura 3.** Sistema de representación múltiple para la formación de la competencia de modelamiento en cursos de matemáticas para ingeniería.

El ambiente de experimentación se desarrolló en un sitio web habilitado en la Red Nacional Académica de Tecnología Avanzada –Renata–, en el que se presentaron los resultados y se fomentó la discusión de los mismos, como parte de una estrategia de visibilidad de la producción realizada por cada uno de los participantes del proceso y la habilitación de formas de interacción en red, entre integrantes de diferentes instituciones. Si bien el uso de este sitio web requiere de un proceso de consolidación en la comunidad académica, es el punto

de partida para la organización de una red de investigación y soporte académico en el área de matemáticas.

Los cuatro primeros capítulos abordan el contexto general de la formación de la competencia de modelamiento desde la perspectiva histórica, epistemológica, funcional y cognitiva. Los siguientes capítulos desarrollan los componentes del modelo experimentado con desarrollos conceptuales, metodológicos y evaluación de resultados. Cierra el libro una síntesis sobre el valor pedagógico del modelo.

## Referencias

- Blomhøj, M. y Jensen, T. H. (2003). Developing Mathematical Modelling Competence: Conceptual Clarification and Educational Planning. *Teaching Mathematics and its Applications*, 22(3): 123-139.
- Blum, W. y Borromeo, R. (2009). Mathematical Modelling: Can It Be Taught And Learnt? *Journal of Mathematical Modelling and Application*, 1(1): 45-58.
- Brito-Vallina, M. L., Alemán-Romero, I., Fraga-Guerra, E., Parra-García, J. L. y Arias-de Tapia, R. I. (2011, mayo-agosto). Papel de la modelación matemática en la formación de los ingenieros. *Ingeniería Mecánica*, 14(2): 129-139
- Brwka, G., Dix, J. y Konolige, K. (1997). *Nonmonotonic Reasoning: An overview*. Stanford, CA: CSLI Publications.
- Erdogan, A. (2010). Primary Teacher Education Students' Ability to Use Functions as Modeling Tools. *Procedia Social and Behavioral Sciences*, 2: 4518-4522.
- Galbraith, P. y Stillman, G. (2006). A Framework for Identifying Student Blockages During Transitions in the Modelling Process. *ZDM*, 38(2): 143-162.
- Hoffman, R., Feltovich, P. J. y Ford, K. M. (1997). A General Framework for Conceiving of Expertise and Expert Systems in Context. En Feltovich, P. J., Ford, K. M. y Hoffman, R. (eds), *Expertise in Context*. Merlo Park, CA: The MIT Press.
- Holland, J. H., Holyoak, K. J., Nisbett, R. E. y Thagard, P. R. (1986). *Induction: Processes of Inference, Learning, and Discovery*. Cambridge, Massachusetts: The MIT Press.

- Jordan, M. I. (1999). *Learning in Graphical Models* [Preface]. Cambridge, MS: The MIT Press.
- Kaiser, G., Blomhøj, M. y Sriraman, B. (2006). Towards a Didactical Theory for Mathematical Modelling. *ZDM*, 38(2): 82-85.
- Kolodner, J. L. y Leake, D. B. (1997). A Tutorial Introduction to Case Based Reasoning. En Leake (ed.), *Case Based Reasoning: Experiences, Lessons & Future Direction* (30-65). Cambridge, MS: AAAI/The MIT Press.
- Lesgold, A. (1998). Multiple Representations & Their Implications for Learning. En Van Someren, M. W., Reimann, P., Boshuizen, P. A. y De Jong, T. *Learning with Multiple Representations* (307-319).
- Ministerio de Educación Nacional (2006). *Estándares básicos de competencias*. Bogotá: Magisterio.
- Ministerio de Educación Nacional (1998). *Lineamientos curriculares: matemáticas*. Bogotá: Magisterio.
- Maldonado, L. F. (2012). *Virtualidad y autonomía: pedagogía para la equidad*. Bogotá: Iconk Editorial.
- Organization for Economic Co-operation and Development (2007). *PISA 2006 - Science Competencies for Tomorrow's World. Vols. 1 y 2*. Paris: OCDE.
- Organization for Economic Co-operation and Development (2003). *The PISA 2003 Assessment Framework-Mathematics, Reading, Science and Problem Solving Knowledge and Skills*, 194.
- Parra-García, J. L. y Arias-de Tapia, R. I. (2011, mayo-agosto). Papel de la modelación matemática en la formación de los ingenieros. *Ingeniería Mecánica*, 14(2): 129-139.
- Wang, H., Johnson, T. R. y Sun, Y. (2005). Object Location Memory: The Interplay of Multiple Representations. *Memory & Cognition*, 33(7): 1147-1159.
- Moreno, R. y Mayer, R. E. (2011). Multimedia-Supported Metaphors for Meaning Making in Mathematics. *Cognition and Instruction*, 17(3): 215-248.
- Sewell, D. K. y Lewandowsky S. (2011, marzo). Restructuring Partitioned Knowledge: The Role of Recoordination in Category Learning. *Cognitive Psychology*, 62: 81-122.



# Capítulo 1



## Visión del modelamiento a partir de la historia de los objetos

Luis Bayardo Sanabria Rodríguez\*

### Introducción

**E**ste capítulo propone una reflexión a partir de una revisión de literatura sobre los modelos generados por el pensamiento de los inventores expuesto en artefactos diseñados de manera empírica; específicamente se hace referencia a las máquinas diseñadas para suplir las necesidades de los pueblos desde épocas remotas; además, se interpretan ejemplos de los desarrollos tecnológicos alcanzados en diferentes épocas basados en principios cognitivos del desarrollo del pensamiento.

El texto basa su construcción en los planteamientos de Jonassen (2006) respecto del cambio conceptual y en la postura teórica de la espiral del modelamiento planteada, con un enfoque constructivista, por Maldonado (2013); esta postura busca relacionar los modelos internos de las personas con los modelos externos en una dinámica recíproca para construir los modelos conceptuales. De acuerdo con Nersessian (1999), se pensaría que unos regulan a los otros en una dinámica que forma la espiral del cambio conceptual. Al observar la evolución histórica de los artefactos, específicamente la evolución de las máquinas, se pueden concebir diferentes estados que han venido transformando el comportamiento de las personas. Los estados están determinados por las realizaciones de la gente, su evolución se plantea en una espiral de conocimiento que concentra su objeto de desarrollo en un modelo conceptual. El modelo conceptual como núcleo de la espiral actúa como transformador de las construc-

\* Ph. D. y docente e investigador de la Universidad Pedagógica Nacional e integrante del grupo de investigación Cognitek.

ciones sociales que van surgiendo en cada época. En este sentido, la evolución del pensamiento del hombre se manifiesta en su capacidad para generar nuevas representaciones como referentes conceptuales que van generando soluciones a los problemas de la sociedad.

La invención de máquinas es un referente para mostrar los modelos conceptuales representados en descripciones textuales y gráficas, diagramas, expresiones matemáticas y otros tipos de representaciones. De acuerdo con Lesh y Doerr (2003), los modelos “son sistemas conceptuales consistentes de elementos, relaciones, operaciones e interacciones gobernadas por reglas que se expresan a través de un sistema de representación externo” (p. 14).

Según Jonassen (2006), existen dos tipos de modelos: mentales, en la mente de las personas, y conceptuales, que representan a los primeros y se manifiestan mediante expresiones algebraicas, diagramas, programas de computador, etc. Al hacer referencia a los sistemas mecánicos, el mental está relacionado con la habilidad para comprender cómo trabaja una máquina, cuáles son sus componentes principales o por qué funciona incorrectamente (Hegarty, Just y Morrison, 1988). El resultado surge con la construcción de un modelo externo donde el modelador puede describir los componentes de la máquina, sus características funcionales y la interacción o interrelación entre ellos. En esta lógica, adquiere sentido la evolución del modelo mental en un modelo conceptual desde una mirada holística, permitiendo la abstracción de conocimiento de los inventores representado en sus modelos.

Este capítulo hace un recorrido histórico que inicia en la antigua Mesopotamia, Grecia y Roma, pasando por la Edad Media y el Renacimiento, hasta la Modernidad con la revolución industrial y la Posmodernidad con el desarrollo de la informática, para mostrar por medio de las representaciones artísticas y literarias la evolución de las diferentes formas de modelamiento que proyectaron la construcción de las máquinas.

## Modelamiento en la civilización antigua

Como primer escenario de la evolución del pensamiento se consideran las civilizaciones antiguas de Mesopotamia y Egipto. Sus competencias para el cálculo numérico les permitieron resolver problemas en el manejo del comercio, el recaudo de impuestos, manejo del riego en la agricultura, etc.

La necesidad de regar sus cultivos los llevó a interesarse en el manejo del agua (Mays, 2010a), mediante la construcción de canales y presas que requerían hacer cálculos y crear dispositivos para poderla sacar de los ríos. El *shadoof* o *shaduf* (figura 1), uno de los primeros artefactos mecánicos, fue inventado

para suplir estas necesidades. El dispositivo se conoció en Mesopotamia en el tiempo de Sargon de Akkad (año 2300 a. C.), emperador semita, fundador de la Dinastía de Akkad, que fue famosa por conquistar a los sumerios (entre los siglos 23 y 22 a. C.) y luego a Mesopotamia; a esta última la dominó durante más de un siglo (Chavalas, 2006). El modelo consistía en una viga soportada en un montante de madera que funcionaba como eje de rotación, la cual tenía en uno de sus extremos una bolsa y, en el otro, un contrapeso que le servía como balanza para la persona que operaba el dispositivo. El movimiento de balanceo permitía sacar el agua de los ríos (Mays, 2010a).

Si se asocia el desarrollo de esa época con el surgimiento de estos modelos, se podrían encontrar evidencias de principios físicos y matemáticos proyectados al desarrollo de los conceptos de equilibrio, que actualmente se traducen en el principio de las palancas. Si se trata de representar esta transferencia del pensamiento, se puede introducir un análisis prospectivo para deducir ecuaciones que representarían el modelo matemático del *shadoof*. Supóngase que el modelo de *shadoof* representa una palanca de primer género, cuyo punto de apoyo varía según las distancias de los pesos (la bolsa de agua y el contrapeso), esto genera un sistema de equilibrio de fuerzas que podría describirse en un modelo diagramático representado por vectores y distancias (figura 1), y un modelo matemático representado por ecuaciones, cuyo elemento transformador demostraría la premonición del artefacto que fue construido en esa época para resolver el problema del riego agrícola.

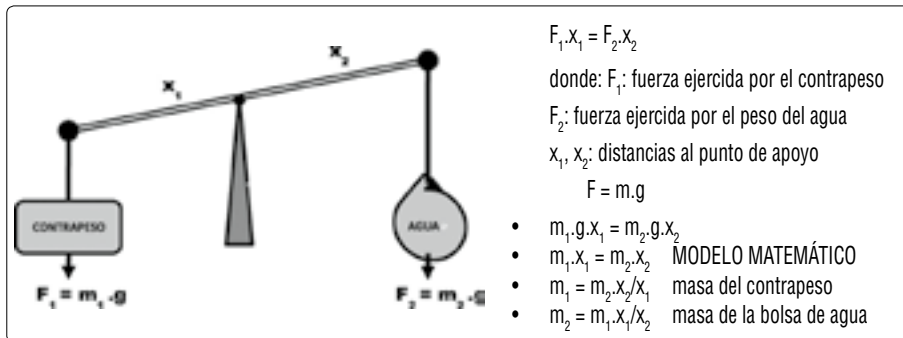
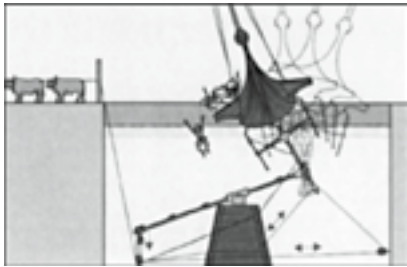


Figura 1. Modelo del shadoof

Los dos modelos obtenidos del *shadoof* muestran los resultados de predicciones basadas en los modelos conceptuales de los egipcios que tomaron como referentes un problema real para construir sus artefactos. Estos resultados se constituyen en un soporte para



Figura 2. Shadoof (ilustración tomada de "Ancient Water Technologies", L.W. Mays, 2010).



**Figura 3.** Mecanismo de niveles y poleas de Arquímedes, utilizado como arma de asedio por los antiguos romanos (ilustración tomada de *A History of the Machine* de Sigvard Strandh, 1979).

sostener la tesis de la evolución en espiral del modelamiento, en el sentido de mostrar el modelo como un elemento funcional que facilita la evaluación de diferentes configuraciones de parámetros y variables. De otro lado, este modelo conceptual, representado a partir del esquema y de las ecuaciones, revela indicios de procedimientos aritméticos y algebraicos correctos. Muy probablemente los sistemas mecánicos fueron contruidos a partir de la evidencia física

misma, lo cual lleva a pensar en el manejo del cálculo como una premonición de las leyes de la física contemporánea.

## Modelamiento en Grecia y Roma

El segundo escenario de la antigüedad está representado por Grecia y Roma. En este caso, la externalización de los modelos mentales de los grandes pensadores se hace por medio de las matemáticas, la escritura y la pintura. Se puede afirmar que existe una relación entre el modelo mental y la manifestación visual en los diagramas y bocetos, en manuscritos y grabaciones en piedra (Cheng, Lowe y Scaife, 2001). Los primeros modelos se expresan en diagramas, dibujos y explicaciones incluidos en manuscritos como *MHXANIKA* o *Problemas mecánicos* (Mon, 2009).

A comienzos de la época griega clásica (600-300 a. C.), la matemática era una herramienta útil en la solución de problemas en contextos reales y en la construcción de dispositivos mecánicos. Pensadores griegos importantes como Aristóteles y Arquímedes, mencionados en los escritos de Heath (2002) y Mon (2009), plantean teorías acerca de la mecánica, postulando principios matemáticos referidos al modelamiento y al diseño de artefactos. Aristóteles en el año 322 a. C. describe la naturaleza del equilibrio de la fuerza en mecanismos simples, sin tener en cuenta el movimiento (Mon, 2009; Oliveira, 2009) y Arquímedes, con su teoría de las palancas y centros de gravedad, demuestra la forma de levantar cargas muy pesadas utilizando fuerzas muy pequeñas (Hegarty, Just y Morrison, 1988). Las dos posiciones conciben formas diferentes de ver un modelo: en principio Aristóteles expresa su modelo conceptual sin vincularlo directamente con el entorno, mientras Arquímedes revela una relación con los hechos que suceden en un contexto real como la guerra. Existen evidencias que muestran la construcción de dispositivos para



la guerra, con modelos que superan la construcción de máquinas simples estáticas. Algunos ejemplos en la línea de Arquímedes se remontan al año 212 a. C. con invenciones como el tornillo, la polea, la palanca, la cuña y la rueda, que se integran en la producción de armas para la guerra contra los romanos (Kerle, Corves, Mauersberger y Modler, 2011). Los dispositivos que generaba Arquímedes a partir de sus invenciones consistían en mecanismos lanzadores de misiles y piedras, grúas de poleas y



**Figura 4.** Grúa con garras de Arquímedes (ilustración de D. P. Crane del libro *A Picturesque Tale of Progress*, de O. B. Miller, 1935).

garras y mecanismos de niveles y poleas ubicados bajo el agua para voltear y hundir los barcos, impidiendo su ingreso a los puertos (Mon, 2009). Una ilustración de este proceso histórico se muestra en las figuras 3 y 4, que muestran varias invenciones de Arquímedes utilizadas como armas eficaces para la guerra.

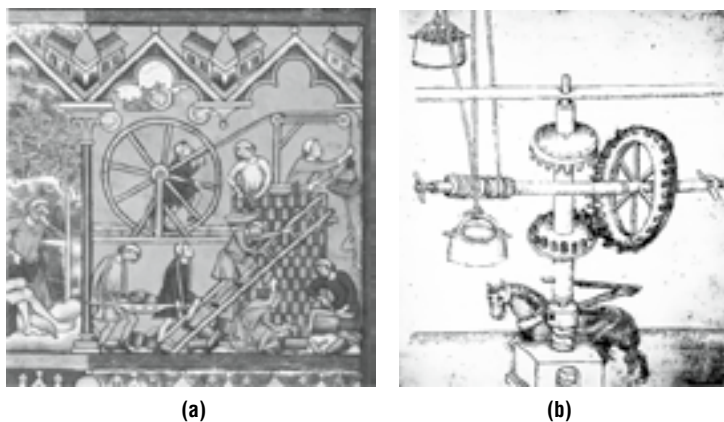
Otros ingenieros griegos que sobresalieron fueron Ctesibius, inventor, en el año 50 a. C., del reloj de agua y de varios mecanismos para generar el movimiento de autómatas, representados en animales, y Herón de Alejandría, quien escribe acerca de las máquinas dinámicas formadas por catapultas y balistas, utilizadas para lanzar flechas y piedras.

El pensamiento de los griegos muestra la transición que surge de la representación mental a la representación matemática, que en algunos casos culmina en el diseño y construcción de objetos reales. Este nivel de pensamiento es un proceso de externalización del conocimiento a través del lenguaje matemático y el diseño de una máquina, y cuya relación con el entorno es, por ejemplo, su uso como instrumento de guerra. La contribución griega al contenido matemático incluye la geometría plana y del espacio, la trigonometría y la ampliación de la aritmética.

La cultura romana se distinguió por el auge de los centros urbanos, lo cual fomentó el desarrollo de la arquitectura. Las matemáticas de los romanos fueron bastantes reducidas. Uno de los pensadores importantes fue Vitruvius Pollio, quien en su tratado *De Architectura* (37 a. C.), además de mostrar un verdadero manual para la construcción de ciudades, describe dispositivos para elevar cargas y armas. Sus escritos narran la construcción de máquinas dinámicas como

las “norias” (que eran pisoteadas por hombres para elevar cargas a las cúspides de los templos), los escorpiones, las catapultas y las ballestas utilizadas en la guerra.

Los modelos mentales de los pensadores romanos se proyectan en el diseño de modelos espaciales representados en planos y perspectivas acompañados de explicaciones textuales. Conciben la construcción del modelo como un elemento funcional acompañado de conceptos teórico-prácticos, descritos en los textos y representados en las gráficas. Al respecto, Clini (2001) presenta un análisis crítico de los dibujos y textos de la Basílica Fano descrita por Vitruvius en su tratado *De Architectura*; a su vez, Ceccarelli (2009) documenta una de las máquinas más importantes descrita por Vitruvius, la “rota magna” o “grúa noria” (figura 5a).



**Figura 5. a.** Ilustración de la “rota magna” (tomada de [http:// en. wikipedia.org/wiki/Tread-wheelcrane](http://en.wikipedia.org/wiki/Tread-wheelcrane)). **b.** “Ox-hoist” de Brunelleschi (dibujo de M. Taccola, tomado de King, R. 2001, Brunelleschi’s Domo, p. 61).

## Modelamiento en el Renacimiento

El tercer escenario histórico hace referencia al Renacimiento, a partir del siglo XV. Se destacan grandes artistas e ingenieros italianos como Brunelleschi y Da Vinci. El primero desarrolló la arquitectura y aportó soluciones a problemas de elevación de cargas a alturas inimaginables para la época. Sus mecanismos fueron utilizados para subir materiales a los domos y naves de las iglesias. Estas máquinas eran grúas sofisticadas que elevaban grandes pesos. Da Vinci se distinguió por sus trabajos remarcados en dibujos y bocetos (Atkins, 2008).

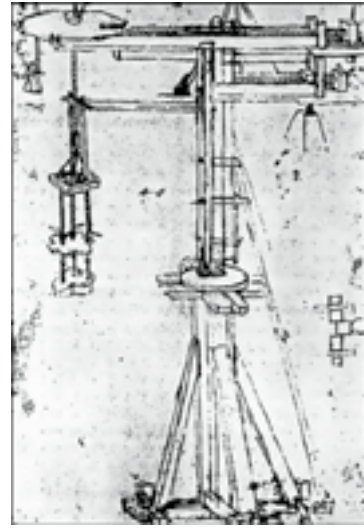
Los modelos conceptuales se muestran en planos y proyecciones que ofrecen soluciones a problemas de su contexto. King (2001) relata el origen de las máquinas más celebres de Brunelleschi. Una de las máquinas que sobresale es la “ox-hoist” o “grúa de bueyes”, construida en 1421 y utilizada en la cons-

trucción del domo de la famosa catedral de Florencia en Italia (véase figura 5b). En esta obra, el autor revela un modelo originado en la observación del problema que tenía para elevar pesos: percibe recursos del entorno y proyecta su modelo mental en planos, perspectivas y diseños que convergen en la construcción de la máquina.

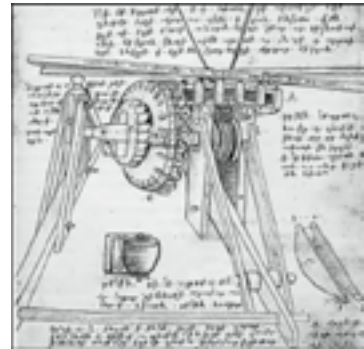
Después de inventar la grúa “ox-hoist”, Brunelleschi construyó en 1423 “el castello” (figura 6). Su diseño consistía en un modelo de grúa formada por un mástil de madera coronado por una viga horizontal pivotada al mástil, lo cual le permitía girar alrededor de la cúpula. El travesaño horizontal estaba asegurado con tornillos y sobre este se montaba una guía de deslizamiento y un contrapeso. Uno de los tornillos horizontales movía el contrapeso a lo largo de la guía de deslizamiento, mientras que otro manipulaba la carga que era levantada por cuerdas tensoras. Estos elementos facilitaban la ubicación de la carga de manera precisa en la cúpula de la iglesia donde descansaba la grúa. El movimiento simultáneo de la carga y el contrapeso mantenían el equilibrio de la grúa (King, 2001).

La necesidad de movilizar cargas sobre la cúpula de la catedral de Florencia condujo a un nuevo diseño que afrontó Brunelleschi en 1443, inventando la grúa de la linterna (figura 7). Su estructura estaba integrada por poleas múltiples, un contrapeso y un sistema de frenado compuesto por un trinquete para mantener suspendida la carga a diferentes alturas (King, 2001).

Los inventos de Brunelleschi muestran el entorno como el referente sobre el cual el inventor proyecta su modelo mental en modelos conceptuales observables en las expresiones físicas de sus obras. En la lógica de Brunelleschi, el modelo conceptual y su relación con el contexto son los activadores de nuevos



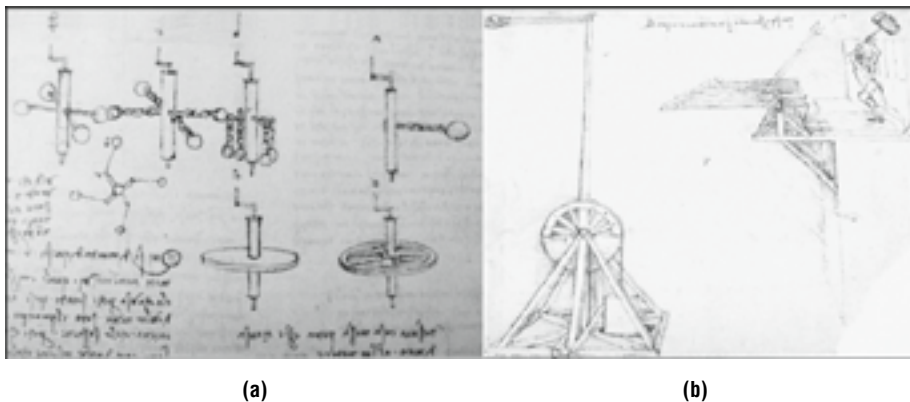
**Figura 6.** “El castello” de Brunelleschi (dibujo de Leonardo da Vinci, tomado de R. King, 2001, Brunelleschi’s Domo, p. 70).



**Figura 7.** Grúa de la linterna de Brunelleschi (boceto de B. Ghiberti, tomado de R. King, 2001, Brunelleschi’s Domo, p. 147).

procesos cognitivos para generar producciones nuevas. Estos referentes conducen a pensar en la evolución en espiral de los modelos mentales cuando se hacen evidentes en modelos conceptuales.

Leonardo da Vinci es famoso por sus modelos realizados en dibujos y bocetos, premoniciones de grandes inventos de máquinas. Algunos de sus escritos predicen leyes de la física descubiertas más tarde y otros actualizan conceptos de la física aristotélica. Las premoniciones de Leonardo da Vinci respecto de la conservación de la energía se evidencian en los dibujos de la rueda de movimiento perpetuo. En relación con los mecanismos de poleas, se resalta el dibujo de un volante que gira movido por una cuerda enrollada en su eje y un peso suspendido en el extremo que le genera movimiento por acción de la gravedad. En los dibujos de catapultas, se observan otros diseños donde aplica principios dinámicos en los dispositivos de doble péndulo no lineales (Moon, 2009) (figura 8). Como arquitecto, su pensamiento se basó en observaciones, experiencias y reconstrucciones de su entorno que lo llevaron a generar modelos que prefiguran futuros inventos de máquinas soportados en postulados teóricos. Sus intentos de desarrollar la aerodinámica lo llevaron a diseñar representaciones de máquinas voladoras que imitaban el vuelo de los pájaros. Castro y Espinosa (2005) se refieren a la obra *El código sobre el vuelo de los pájaros*, en la cual da Vinci muestra los principios físicos de resistencia del aire y del movimiento representados en mecanismos sofisticados que replican el vuelo de las aves.

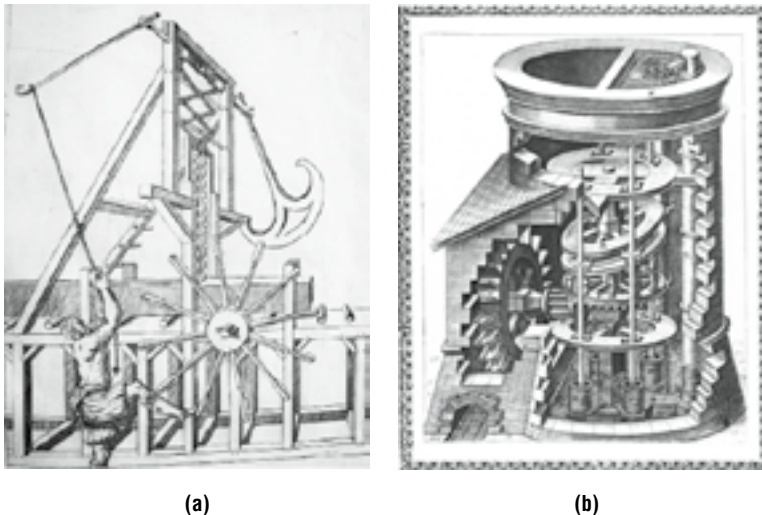


**Figura 8.** Volante con efecto centrífugo y catapulta de doble péndulo no lineal de Leonardo da Vinci (Ilustración tomada de F.C. Moon, *History of Dynamics of Machines and Mechanisms from Leonardo To Timoshenko*, p.5).

El pensamiento de Leonardo da Vinci podría reflejar la observación de modelos conceptuales y la activación de procesos cognitivos para generar nuevos modelos conceptuales representados de manera gráfica para ser observados por otros.

Algunos tratados del Renacimiento muestran grandes desarrollos del modelamiento: representados por transformaciones de modelos conceptuales en dispositivos sofisticados con funciones y usos en un contexto. Kerle, Corves, Mauersberger y Modler (2011) y Moon (2009), al referirse a las publicaciones aparecidas en el siglo XVI, distinguen, por su importancia, dos tratados, incluidos en lo que se denominó “Theatres of machines”:

- *Théâtre des Instruments Mathématiques et Mécaniques*, del francés Jacques Besson, publicado en 1578, que incluye 60 ilustraciones de modelos de máquinas y resalta las representaciones de la resonancia del péndulo aplicadas para accionar bombas hidráulicas y las máquinas para aserrar madera (figura 9a).
- *Le Diverse et Artificiose Machine*, publicado en 1588 en italiano, que incluye 195 ilustraciones de máquinas, la mayoría elevadoras de agua (véase figura 9b. bomba hidráulica).



**Figura 9. a.** Resonancia del péndulo para accionar una máquina de aserradero (Ilustración tomada de F.C. Moon, *History of Dynamics of Machines and Mechanisms from Leonardo To Timoshenko*, p.6, 2009). **b.** Bomba para elevar el agua de Raminelli (Ilustración tomada de H. Kerle, B. Corves, K. Mauersberger & K.H. Modler, *The Role of Mechanism Models for Motion Generation In Mechanical Engineering*, p. 109).

Ya en esta época, la matemática era la principal herramienta que tenía un hombre de ciencia para entender la naturaleza, en particular para resolver problemas de ingeniería. Su rápido desarrollo estuvo vinculado al uso y perfeccionamiento de las máquinas y la construcción de estas determinó la creación de la mecánica teórica y el estudio científico del movimiento de cuerpos. Algunos modelos conceptuales de este periodo constituyeron el inicio del desarrollo de la ciencia moderna.

## Modelamiento en la sociedad industrial

El cuarto escenario histórico es la revolución industrial que se caracteriza por el desarrollo de automatismos, el uso del hierro y el desarrollo de la industria textil. Además de los avances sorprendentes en la ciencia, las matemáticas adquirieron en esta época cierta independencia en relación con otras ciencias, mediante el desarrollo de temas especializados que mejoraron los modelos conceptuales. Los problemas surgidos a partir de la nueva industria se solucionaron a partir de teorías físico-matemáticas y aparecieron cada vez más modelos conceptuales en todas las áreas del conocimiento, como por ejemplo en la economía y en las ciencias sociales.

El pensamiento de los inventores se centró en la construcción de artefactos para reducir el esfuerzo y la mano de obra. La demanda de energía acompañada del pensamiento economicista exigió a los creadores diseñar máquinas para generar movimiento. Fue una época de transformación:

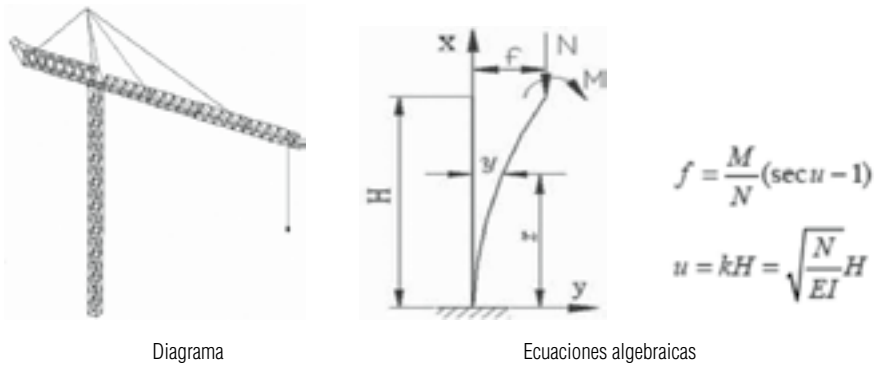
- Los modelos conceptuales eran más completos.
- Los ingenieros se apoyaban en el desarrollo del pensamiento científico.
- Se aplicaron los principios de la física moderna para crear grandes máquinas, como la “máquina de vapor” de Watt, que determinó la creación de una multiplicidad de modelos mecánicos que revolucionaron la producción industrial y el desarrollo del transporte (véase el documento de Moon, 2009).
- Se crearon escuelas politécnicas para formar a los ingenieros que debían mejorar los modelos. Reuleaux (citado en Kerle et ál., 2011), creador de la cinemática moderna, establece los principios de diseño para los mecanismos y las máquinas, e inventa la cadena cinemática que sirvió de base para la creación de mecanismos y máquinas elementales, como el tren de poleas, el tornillo sin fin, etc. Los principios del diseño son base para generar estrategias pedagógicas y métodos de aprendizaje para el modelado de máquinas. Precisamente Reuleaux crea un método para modelar máquinas que consistía en el análisis, la codificación y la síntesis de mecanismos. En la base de este proceso están el análisis del entorno, la codificación de la información y la síntesis.

## Modelamiento en la sociedad de la información

El último escenario histórico considerado en este capítulo corresponde a la era moderna, distinguida por grandes cambios sociopolíticos generados por el desarrollo del capitalismo y el gran avance de la tecnología computacional. Es un periodo de transformación del pensamiento analógico en pensamiento



digital. Los modelos conceptuales, inspirados en la observación de máquinas antiguas, evolucionan a partir de la demostración matemática y la simulación computacional; el funcionamiento de una máquina se simula antes de su construcción. Por ejemplo, si se observa el diseño de la grúa de torre descrita en Yu (2008), originada probablemente, por sus muchas características similares, en inventos previos como el *castello* de Brunelleschi (King, 2001), sus cálculos se desarrollan a partir de la simulación de la capacidad de soportar pesos, la rigidez estática, el desplazamiento circular, la amortiguación de los pesos, la rigidez de los cables, el momento de giro... Estos factores son analizados para obtener un modelo diagramático y deducir las ecuaciones que permiten definir el modelo algebraico de la grúa (figura 10).



**Figura 10.** Modelo mecánico del desplazamiento de la grúa de torre (tomado de L. Yu, 2008, *Calculation method and control value of static stiffness of tower crane*, pp. 831-832).

Si se procesan las diferentes variables del análisis matemático en un programa de computador, se podría observar el comportamiento de la grúa sometida a diferentes cargas, lo cual constituye una prueba de los requerimientos para construcción del dispositivo real.

Los modelos conceptuales, hasta el momento, se habían aplicado en una gran cantidad de problemas en ingeniería, en particular en la construcción de máquinas. Estos modelos tienen una base fuerte en teorías físicas y matemáticas; sin embargo, muchos de estos habían quedado relegados, porque presentaban una cantidad desmesurada de cálculos matemáticos, imposibles de realizar a mano. La informática posibilita los cálculos implícitos en los modelos conceptuales y se analizan las diferentes componentes y usos de una máquina antes de su construcción.

## Conclusión

Los cinco escenarios se constituyen en un referente para mostrar los cambios que ha tenido el ser humano en su percepción del mundo y cómo la evolución del pensamiento lo ha llevado a transformar sus modelos conceptuales para generar nuevas formas de representación y nuevos dispositivos que le han permitido resolver problemas de su entorno. Si se hace un recuento de este recorrido histórico, se puede encontrar que en la antigüedad y en la época medieval no existían cálculos para construir las máquinas; el modelo mental de los humanos se objetivaba en modelos conceptuales premonitorios, a partir de los cuales se diseñaban y se probaban los dispositivos en contextos reales. Con el desarrollo de la ciencia moderna, empieza a calcularse todo lo que se produce; los modelos de máquinas son más precisos y más funcionales; el modelo conceptual de los individuos no solamente incluye postulados y descripciones verbales y gráficas, sino que además incluye la deducción de fórmulas y elaboración de cálculos, aparece la era digital y la modelación se realiza en programas computacionales. En general, existe una transformación de los modelos análogos a digitales, proyectándose en la simulación como forma de modelación que antecede a la construcción del dispositivo.

La historia de las máquinas, desde los pensadores e inventores griegos hasta los arquitectos del renacimiento y sus posteriores aplicaciones a través de la cinemática de las máquinas en la ingeniería moderna, ha venido mostrando la transferencia de la invención a partir de la relación entre los modelos mentales y los modelos conceptuales. Este proceso inicia con la representación de la realidad como referente del modelo mental, y la construcción de modelos conceptuales que surgen a partir de la demostración empírica.

A partir de las creaciones antiguas se empiezan a observar los intentos del ser humano para representar el modelo mental en un modelo conceptual expresado en un objeto observable y manipulable. Esta acción ha dado origen a las modificaciones sucesivas de los modelos conceptuales representados en bocetos y artefactos que han sentado las bases para el desarrollo de la ingeniería. Con la evolución del modelamiento de los objetos se ha desarrollado el conocimiento. Muestra de ello es el descubrimiento de los principios matemáticos y físicos asociados al desarrollo de máquinas y dispositivos que cumplen una función específica: suplir la necesidad de aplicación de fuerzas y movimientos para convertirse en una extensión de las capacidades de los individuos.

El modelamiento crece en importancia a medida en que: a) aumenta la complejidad de la máquina y de los factores que afectan su utilidad o efectividad; b) aumenta el costo de crear mecanismos que no funcionen como se espera; c) la intervención de muchas personas en el proceso de creación de máquinas obliga a distribuir información muy detallada y recibir *feedback* antes de y durante la creación (material) de la máquina.



La necesidad de las máquinas trae consigo la necesidad de modelar sistemas complejos y, con ello, el estudio de las matemáticas recibe un gran impulso. En nuestro proyecto, Renata II, se busca explotar esa asociación natural e inmediata entre los modelos y el estudio de las matemáticas, fomentando el aprendizaje de las mismas a través de experiencias controladas en el desarrollo de modelos para la explicación de fenómenos o solución de problemas concretos.

## Referencias

- Atkins, J. (2008). Brunelleschi and the Dome of Santa Maria del Fiore. *AIArchitect*, v. 15, Il Duomo: 1, e. 7. [http://info.aia.org/aiarchitect/thisweek08/0725/0725p\\_duomo.cfm](http://info.aia.org/aiarchitect/thisweek08/0725/0725p_duomo.cfm)
- Brashea, R. (2004). *Ramelli's Machines: Original Drawings of 16th Century Machines*. Washington D. C.: Smithsonian Institution Libraries.
- Castro, A. y Espinosa, A. E. (2005). Leonardo da Vinci: la obsesión por volar. *Revista de Divulgación de la Ciencia de la UNAM*, 74: 26.
- Ceccarelli, M. (2009). A Brief Account on Roman Machines and Cultural Frames. En H.-S. Yan y M. Ceccarelli (eds.), *International Symposium on History of Machines and Mechanisms*, Springer Science.
- Chavalas, M. W. (2006). *The Ancient Near East: Historical Sources in Translation*. Oxford: Blackwell Publishing.
- Cheng, P. C-H., Lowe, R. K. y Scaife, M. (2001). Cognitive Science Approaches To Understanding Diagrammatic Representations. *Artificial Intelligence Review*, 15: 79-94.
- Clini, P. (2001). Vitruvius' Basilica at Fano: The Drawings of a Lost Building from De Architectura Libri Decem. The International Archives of the Photogrammetry, Remote Sensing and Spatial Information Sciences, Vol. 34, Part 5/W12.
- Heath, T. L. (2002). *The Works of Archimedes*. New York: Dover Publication Inc.
- Hegarty, M., Just, M. A. y Morrison, I. R. (1988). Mental Models of Mechanical Systems: Individual Differences in Qualitative and Quantitative Reasoning. *Cognitive Psychology* 20: 191-236.
- Jonassen, D. H. (2006). *Modeling with Technology: Mindtools for Conceptual Change*. Columbus, Ohio: Pearson Prentice Hall.
- Kerle, H., Corves, B., Mauersberger, K. y Modler, K. H. (2011). The Role of Mechanism Models for Motion Generation in Mechanical Engineering. En M.

- Ceccarelli (ed.), *Technology Developments: The Role of Mechanism and Machine Science and IFToMM*, Mechanisms and Machine Science 1, Springer Science.
- King, R. (2001). *Brunelleschi's Domo: The Story of the Great Cathedral in Florence*. London: Pimlico.
- Lesh, R. y Doerr, H. M. (2003). Foundations of a Models and Modeling Perspective on Mathematics Teaching, Learning and Problem Solving. En D. H. Jonassen (eds.), *Modeling with Technology: Mindtools for Conceptual Change*. Columbus, Ohio: Pearson Prentice Hall.
- Maldonado, L. F. (2013). La espiral del modelamiento y la formación de esta competencia con apoyo de ambientes digitales. Sexto Encuentro Nacional y Segundo Regional de Experiencias Curriculares y de Aula en Educación en Tecnología e Informática: la Transversalidad e Interdisciplinariedad de la Tecnología. Pasto, Colombia.
- Mays, L. W. (2010). *Ancient Water Technologies*, Springer Science.
- Mays, L. W. (2010a). A Brief History of Water Technology During Antiquity: Before the Romans. En L. W. Mays (ed.), *Ancient Water Technologies* (pp. 1-3), Springer Science.
- Moon, F. C. (2009). History of Dynamics of Machines and Mechanisms from Leonardo to Timoshenko. En H. S. Yan, M. Ceccarelli (eds.), *International Symposium on History of Machines and Mechanisms*, Springer Science.
- Nersessian, N. J. (1999). Model-Based Reasoning in Conceptual Change. En L. Magnani, N. J. Nersessian y P. Thagard (eds.), *Models are Used to Represent Reality*. New York: Kluwer academic/Plenum.
- Oliveira, A. R. E. (2009). Some Origins of TMM Arisen from Pseudo-Aristotle and Hero of Alexandria. En H. S. Yan y M. Ceccarelli (eds.), *International Symposium on History of Machines and Mechanisms*, Springer Science.
- Strand, S. (1979). *A History of the Machine*. New York: A & W Publishers Inc.
- “Vitruvius Pollio”. Complete Dictionary of Scientific Biography. 2008. Retrieved August 05, 2012 from Encyclopedia.com: <http://www.encyclopedia.com/doc/1G2-2830904942.html>
- Yu, L. (2008). Calculation Method and Control Value of Static Stiffness of Tower Crane. *Journal of Mechanical Science and Technology*, 22: 829-834.

## Capítulo 2



# Validación de modelos desde la perspectiva epistemológica

Hugo Franco Triana\*

### Síntesis

La validación de modelos en el ciclo de vida del modelado y la simulación (M&S) es un proceso de gran importancia para garantizar no sólo la calidad de los resultados de las simulaciones, sino también la validez epistémica del modelo obtenido y de los resultados de la experimentación numérica asociados a dicho modelo, como representación correcta, desde la perspectiva de un problema, fundamental o aplicado, formulado a partir de características y comportamientos propios de un sistema u objeto del mundo real. Así pues, diversos trabajos han abordado el problema del conocimiento que puede ser obtenido mediante el análisis conceptual del modelo para simulación y de los patrones de comportamiento exhibidos por la simulación del mismo en ambientes computacionales. A continuación se presenta el estado de la investigación sobre los aspectos epistemológicos referidos a la validación conceptual y aplicada de modelos obtenidos mediante estudios basados en M&S.

### Introducción

El desarrollo de modelos para la descripción de un aspecto particular de la realidad ha estado presente desde las primeras etapas del pensamiento científico. Ya desde el segundo milenio a. C., culturas como la babilónica, egipcia e

---

\* Ph. D. y profesor investigador de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Central. Grupo de investigación Complexus. Correo electrónico: hfrancot@ucentral.edu.co  
El autor agradece las valiosas conversaciones que sobre el tema sostuvo con el profesor José Jesús Martínez, MSc., de la Universidad Católica de Colombia.

india (Schichl, 2004) contaban con modelos aritméticos razonablemente elaborados y aplicados de manera efectiva a sus asuntos cotidianos. De hecho, las primeras aproximaciones, provenientes de Egipto y Babilonia, y razonablemente precisas para el grado de desarrollo de las matemáticas de la época, estuvieron ligadas a las necesidades de labores agrícolas. El concepto de modelo siguió siendo empleado de manera espontánea en la antigüedad, notoriamente en la Grecia clásica, como mecanismo de descripción y, de alguna manera, explicación del comportamiento de los fenómenos naturales<sup>1</sup>.

De particular interés es el caso del modelo geocéntrico del universo de Ptolomeo, que abordó el estudio de una realidad física de más difícil acceso a la experiencia directa, y que buscaba, de manera explícita, la coincidencia de las predicciones del modelo con las órbitas, aparentemente caprichosas, de los planetas observables para la época. Estos objetivos –describir, explicar, predecir y facilitar la medida de fenómenos naturales–, sumados al concepto de prueba, introducida por Pitágoras como sustento argumentativo de sus modelos matemáticos (principalmente abstractos), contienen los cimientos de la disciplina del modelado.

De otro lado, el uso del modelado matemático para la solución de problemas del mundo real, específicamente aquellos que tenían mayor relevancia o prioridad por su utilidad práctica, implicaba el desarrollo de métodos reproducibles y de uso accesible por los usuarios finales, de modo que se obtuvieran resultados válidos y útiles. Tal necesidad fue abordada por Al-Jwarizmi en sus trabajos sobre métodos algebraicos que conducirían posteriormente al desarrollo del concepto de algoritmo, en el contexto de las ciencias de la computación. Los algoritmos son la base sobre la que se construyen implementaciones numéricas de modelos adecuados para la reproducción de características y comportamientos de los fenómenos modelados, mediante el uso del computador, lo que se conoce actualmente como *simulación*.

Bunge (1969) definió simulación como una relación entre los objetos  $x$  y  $y$ , donde  $x$  “simula” a  $y$ , si: a) existe una relación de correspondencia entre las partes y las propiedades de  $x$  y  $y$ ; b) la analogía es de valor para  $x$ , o la entidad  $z$  que la controla. Guala (2002) critica esta definición por ser “antropocéntrica” pero, sobre todo, imprecisa, al permitir que incluya, entre otros, la similitud entre fenómenos no controlados ni observados y el simple uso de analogías en descripciones verbales o la construcción de modelos estáticos (p. ej. mapas).

Por su parte, Shannon y Johannes (1976, p. 723) definieron la simulación como:

(...) el proceso de diseñar un modelo de un sistema real y llevar a cabo experiencias con el mismo con la finalidad de comprender el

1 Ver capítulo 1 de este trabajo.

comportamiento del sistema o de evaluar nuevas estrategias, dentro de los límites impuestos por un criterio o conjunto de ellos, para el funcionamiento del sistema.

Una de las ventajas del uso de simulaciones computacionales (sustentadas, naturalmente, en modelos matemáticos robustos) es que estas permiten obtener resultados de utilidad en la caracterización del comportamiento de fenómenos, objetos (diseños) y procesos del mundo real que no pueden ser observados fácilmente en entornos experimentales controlados (laboratorio) o mediante observación directa. Actualmente, para la formulación de teorías consistentes, desde la astrofísica (dinámica de las galaxias, ciclo de vida de las estrellas) hasta la mecánica cuántica (caracterización de la estructura de la materia, predicción de existencia de partículas subatómicas), se hace uso creciente en extensión e importancia de resultados provenientes de la experimentación numérica propia del modelado y simulación.

En efecto, Rita Colwell, directora, en 1999, de la National Science Foundation (NSF) de EE.UU., reconoció en la conferencia llevada a cabo ese mismo año que el modelado y simulación, como conjunto de métodos de solución de problemas, herramientas conceptuales y aproximaciones metodológicas, constituye un tercer componente de la ciencia, al lado de teoría y experimentación (Colwell, 1999).

En esta misma línea, el panel de expertos establecido *ad hoc* para la formulación de políticas y estrategias para el fortalecimiento del desarrollo tecnológico de EE.UU., se pronunció en términos de la visión estratégica de la inversión en formación en ingeniería con base en el modelado y simulación (The NFS Blue Ribbon Panel, 2006, p. XVI):

El panel recomienda que la NSF asegure un esfuerzo para explorar la posibilidad de iniciar un ajuste de gran envergadura en nuestro sistema educativo en ingeniería para reflejar la naturaleza multidisciplinar de la ingeniería moderna y para ayudar a los estudiantes a adquirir las competencias necesarias en modelado y simulación.

Estos planteamientos reflejan el creciente interés en el valor estratégico del M&S como soporte a las actividades de investigación aplicada y desarrollo tecnológico e innovación en términos de liderazgo y capacidad efectiva de solución de problemas reales en función de su relevancia e impacto para el éxito económico y social. La responsabilidad implícita en este objetivo, de naturaleza estratégica a escala social, adquiere una importancia significativa, relativa a la afirmación de que los resultados obtenidos mediante estudios fundamentados en M&S tienen tanta validez, desde el punto de vista conceptual y aplicado, como las teorías probadas empíricamente mediante observación directa.

Tal reivindicación del carácter científico y del rigor metodológico del M&S da origen a conceptos, métodos, procedimientos y técnicas relacionadas con la elaboración de modelos para simulación<sup>2</sup> correctos y fieles del sistema bajo estudio, de implementación computacional consistente con el modelo formulado y de validación de los resultados de dicha implementación en el proceso de simulación del modelo. A su vez, los métodos, procedimientos y técnicas propuestos en dicho proceso (conocido en el estado de la investigación del área como el “ciclo de vida del modelado”) deben contar con un soporte epistemológico que respalde el conocimiento aportado al análisis y solución de cada problema a partir de la aplicación del M&S.

## Conocimiento desde el modelado y simulación

### El Modelo

En su connotación más amplia, el modelo de un fenómeno es un conjunto de representaciones formales, que incorpora sin ambigüedad los conocimientos adquiridos mediante todas las fuentes pertinentes sobre el fenómeno de interés para el estudio. De esta forma, el modelo consiste en la especificación formal de los elementos de un sistema, las relaciones entre los mismos y los parámetros que permiten contextualizar el desempeño del sistema de acuerdo con las características del entorno y las relaciones del sistema del mundo real con el mismo.

Así, el desarrollo del modelo asociado a un objeto, sistema o fenómeno, independientemente del ámbito científico o aplicado en el cual tiene existencia, busca la caracterización cualitativa y cuantitativa de un aspecto específico del objeto del mundo real, generalmente dinámico (comportamientos, evolución y cambios de estado del sistema relacionado), de interés para la consecución de los objetivos del estudio basado en M&S.

En el modelo para la simulación se pueden incluir, entre otras, las siguientes características:

- Relaciones matemáticas emergentes (alto nivel) entre determinados aspectos del sistema.
- Mecanismos subyacentes relativos a las relaciones entre los diferentes elementos del sistema.
- Los valores umbrales de los parámetros que determinan la dinámica del sistema a partir de cambios de estado.

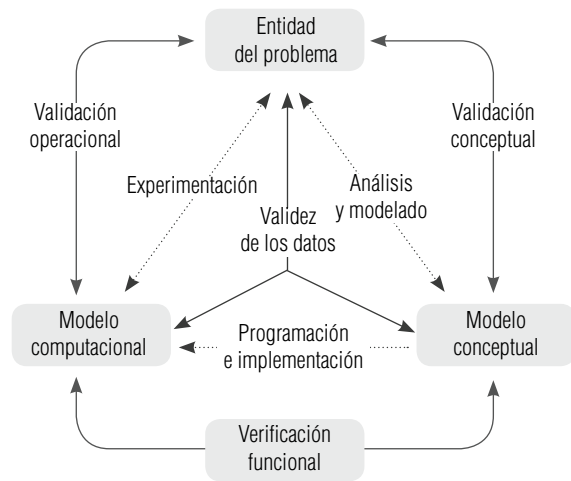
<sup>2</sup> En adelante se usará el término “modelo para simulación” para referirse a modelos específicamente desarrollados en el contexto de estudios fundamentales en M&S.

- Estructuras y patrones característicos, coherentes con la formulación conceptual del modelo, en los resultados.
- Patrones de interacción y competencia entre estructuras coherentes.

### El proceso del M&S

Desde la perspectiva de la NSF, citada anteriormente, el proceso de M&S, como componente del conocimiento científico, exige un proceso sistemático, riguroso y reproducible, que permita garantizar la calidad de sus resultados, tanto desde el punto de vista conceptual (cualitativo) en la caracterización del objeto de estudio como desde el punto de vista de comportamiento (cuantitativo) en la implementación de los métodos y herramientas computacionales que permiten efectuar la experimentación numérica. Sargent (2010) presenta una versión sintetizada de los procesos y actividades requeridos en un estudio basado en modelado y simulación (ver figura 1).

Si bien en la mayoría de áreas de aplicación el peso del trabajo relativo al modelado se centra en el desarrollo de un modelo para reproducir un comportamiento observado (y medido), en el M&S, como disciplina en sí misma, buena parte del trabajo se lleva a cabo en el componente de modelado en la búsqueda de dar respuesta a la pregunta de investigación que determina los objetivos del estudio.

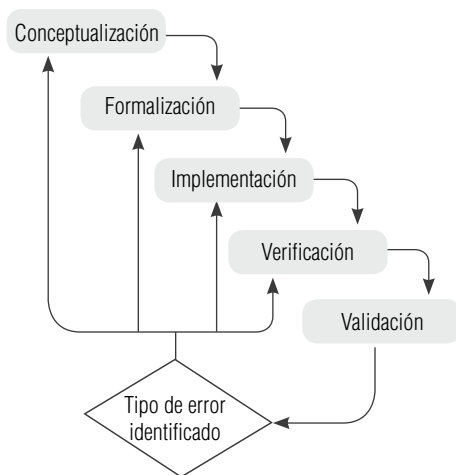


**Figura 1.** Proceso de M&S en función de la validez del modelo obtenido (adaptación propia del gráfico presentado en Sargent, 2010).

En general, la aplicación del M&S a la solución de problemas específicos en ciencias básicas, ciencias sociales y económicas e ingeniería, en términos de objetivos como la caracterización, predicción, diseño, optimización, etc., se puede entender como un ciclo (que está, implícitamente, inspirado en el concepto, proveniente de la informática, del ciclo de vida del software) en el que intervienen de manera más o menos secuencial las etapas de conceptualización basada en descripciones en lenguaje natural, formalización en lenguaje matemático, implementación computacional, verificación funcional del modelo informático

obtenido y validación general del modelo en función de los resultados obtenidos, tanto en los aspectos conceptuales como en los resultados numéricos consecuentes (ver figura 2). A continuación se describe brevemente cada una de las etapas mencionadas:

- **Conceptualización (modelo narrativo):** análisis general del sistema real. Implica la determinación formal de los elementos, aspectos y relaciones relevantes en el sistema bajo estudio: definición de las partes relevantes, de los procesos y de las relaciones y un planteamiento claro del problema que se pretende solucionar.
- **Formalización (modelo esquemático):** definición de las variables del modelo. Selección y exclusión de partes y relaciones; escalas temporal y espacial para la solución del problema.
- **Implementación (modelo informático):** traducción del modelo esquemático a la representación codificada (en lenguaje de computador); reorganización de ecuaciones; representación apropiada de operaciones (estructuración del código y optimización).



**Figura 2.** Ciclo del modelado y simulación en el que se discriminan, según casos, los errores de mayor jerarquía para refinar, de manera cíclica, el modelo resultante y su implementación computacional con fines de experimentación numérica.

- **Verificación funcional:** análisis de estabilidad. ¿Produce el modelo resultados razonables/creíbles? (experiencia). Análisis de sensibilidad: variación de los resultados ante cambios en las variables dentro del rango de variación natural. Un parámetro crítico es aquel que induce cambios fuertes con pequeñas variaciones. Se deben analizar los resultados ante cambios en los parámetros dentro del error propio de cada uno.
- **Validación:** comprobación del modelo con datos independientes (fuentes de terceros). Comparación de los resultados del modelo respecto a modelos equivalentes en función (trabajos previos).

La validación nunca es absoluta. Buenos resultados no garantizan un comportamiento correcto en todos los escenarios. La complejidad de los datos reales siempre supera a la de los conjuntos de control. Los resultados contrastados

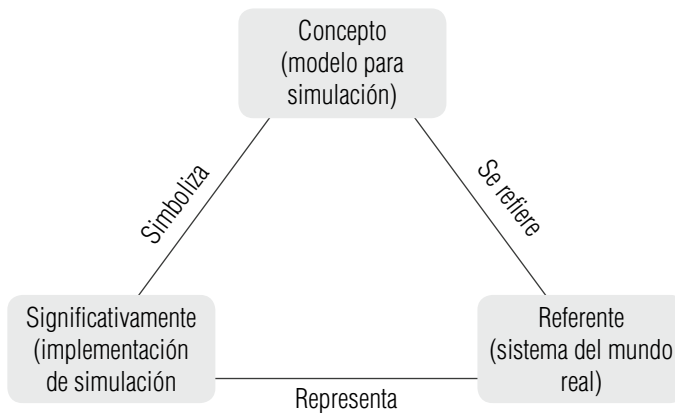


con el comportamiento conocido a priori del sistema bajo estudio permiten hacer correcciones en el propio planteamiento inicial del modelo.

### Epistemología del M&S

La ontología, en su acepción tradicional, es definida como estudio del ser, el estudio de lo que existe. En el ámbito del M&S, es posible interpretar esta definición estableciendo que la ontología del modelado corresponde a la descripción de un aspecto particular (fenómeno) del mundo real, de interés para un observador determinado en la solución de un problema específico, entregada por un modelo formal (matemático).

Esta connotación tiene un carácter representativo, en la medida en que los comportamientos y características del sistema bajo estudio en un caso de aplicación del M&S deben pasar por un proceso de abstracción (elección de aspectos relevantes al problema particular, simplificación –p. ej., linealización, eliminación de factores secundarios–, formalización de los valores y las relaciones entre variables en especificación matemática, etc.), de manera que el modelo para simulación resultante sea susceptible de ser llevado a una implementación computacional y sus resultados puedan ser interpretados en función de los objetivos del modelado, bajo la óptica del problema de investigación abordado.



**Figura 3.** Adaptación al M&S del triángulo semiótico propuesto por Richards y Ogden (1923).

Esta tarea de transformación entre modos de representación, relacionada, según Maldonado (2012), con el ciclo del modelado, se puede entender en su analogía con el “triángulo semiótico” (Ogden y Richards, 1923), tal como se presenta en la figura 3, ya que implica la construcción de modelos conceptuales basados en abstracciones de los elementos y relaciones del sistema del mundo real hacia la construcción de referentes matemáticos y computacionales mediante la formulación de representaciones formales (en lenguaje matemático)

y las correspondientes versiones algorítmicas del modelo en la búsqueda de resultados obtenidos mediante simulación (en su componente de experimentación numérica).

El trabajo de Turnitsa, Tolk y Padilla (2010) utiliza el triángulo semiótico para organizar los aspectos ontológicos, epistemológicos y teleológicos del M&S en función del nuevo conocimiento que captura la realidad y ofrece predicciones a partir del comportamiento intrínseco al modelo desarrollado. La caracterización obtenida bajo esta óptica se estructura de la siguiente manera:

- Consideraciones ontológicas: la relación entre los vértices referente y concepto en el triángulo responde a las preguntas “qué es” y qué describe”; en referente, la perspectiva ontológica de la realidad; en concepto, la representación ontológica de la realidad.
- Consideraciones teleológicas: vértices concepto y significativo en su relación con el referente; se responde a la pregunta “cuál es el propósito del modelo y su simulación. En el vértice concepto, cuál es la pregunta de investigación que orienta el desarrollo del modelo; en el vértice significativo, cuál es la pregunta (en función de los resultados esperados) que rige la simulación.
- Consideraciones epistemológicas: la relación entre los vértices referente y concepto responde a la pregunta qué es verdadero/falso en la abstracción que a su vez es verdadero/falso en el sistema del mundo real; entre los vértices concepto y significativo, responde a la pregunta qué es verdadero/falso en la implementación que a su vez es verdadero/falso en el sistema bajo estudio. Estas consideraciones permiten establecer qué es considerado como conocimiento resultante de aplicar el ciclo de vida del M&S a la solución de un problema.

De este modo, se puede abordar la dimensión epistemológica del proceso de generar un modelo para simulación, en función del conocimiento que puede ser extraído del análisis del modelo formulado y de la observación de su comportamiento a través de la simulación de dicho modelo.

Si bien este tipo de conocimiento goza actualmente de reconocimiento y aceptación generalizados por la comunidad científica, la aproximación filosófica, en general, y epistemológica, en particular, al M&S es relativamente reciente, y muchos aspectos relativos a la teleología y a la epistemología detrás de los estudios fundamentados en M&S están aún por abordarse. El enfoque de la filosofía de la ciencia hasta las exhaustivas y amplias aportaciones de Thomas Kuhn se había centrado en aspectos más cercanos al componente teórico de la ciencia, con una atención relativamente menor a los aspectos de la aplicación

posterior del conocimiento científico, relacionados estrechamente con la validez y utilidad de las teorías (modelos). Kuhn (1961) describió la estructuración teórica del conocimiento empírico como un proceso creativo, capaz de proveer aportaciones novedosas al conocimiento científico sobre un aspecto de la realidad, específicamente en la interpretación de los fenómenos en función de sus elementos y relaciones entre los mismos.

En este sentido, el método científico (denominado en algunos trabajos como modelo hipotético-deductivo al considerar incertidumbres, resolución en las medidas y otros aspectos prácticos) como único medio aceptado de manera general por la comunidad científica para la formalización de procedimientos, métodos conceptuales y experimentales de generación y acceso al conocimiento y de interpretación de los resultados y consecuencias de modelos y teorías, no ha alcanzado un estado completo de estandarización consensuada por la comunidad científica. Aun así y, a pesar de las críticas que autores como Hempel (1966) han planteado a dicho modelo, en el contexto del M&S se emplean de manera generalizada las mismas herramientas de análisis para interpretar y validar los resultados del proceso de modelado establecidas en la experimentación tradicional, tratando los resultados de las simulaciones y las medidas numéricas obtenidas a partir de los modelos desarrollados como resultados experimentales por sí mismos. Aportaciones recientes, como el trabajo de Peschard (2011), estudian la novedad epistémica relacionada con la formulación e implementación de un modelo para simulación, apuntando que esta novedad puede conseguirse mediante:

- El hecho de que no todas las simulaciones provienen necesariamente de una única o buscan la constatación de la misma.
- La transformación del modelo teórico en un modelo para simulación por sí misma puede ser una fuente de novedad suficientemente relevante, con miras a la aplicabilidad del modelo (resultados “empíricamente informativos”, Peschard, 2011).
- La implementación computacional, mediante un algoritmo, de la solución a un problema específico a través de la simulación propia del modelo bajo estudio.

Aunque, desde la perspectiva epistemológica, el M&S puede interpretarse de acuerdo con la articulación teórica propuesta por Kuhn, algunos aspectos y características particulares del área requieren de un tratamiento ajustado, específico del tratamiento de datos, cuyos orígenes y fuentes de error son distintos en naturaleza de aquellos adquiridos en los procesos de experimentación tradicional, en laboratorio. En particular, a diferencia de los errores sistemáticos y de la incertidumbre introducida por la resolución de los aparatos de medida en la ex-

perimentación tradicional, en el ámbito de la simulación se presentan errores de aproximación numérica, introducidos por la representación computacional de cantidades de tipo real (error de punto flotante), además de aquellos artefactos presentes en el comportamiento, producto de problemas de convergencia e inestabilidades numéricas de los métodos empleados para reproducir computacionalmente las características generales y, usualmente, la dinámica del modelo base.

Este reto ha sido abordado por filósofos de la ciencia como Laymon (1990), quien expone en varios trabajos las consecuencias e impacto del uso de aproximaciones y supuestos (generalmente simplificaciones, como es el caso de la linealización en modelos físicos) en la obtención de conclusiones a partir de teorías, específicamente sobre aquellas soportadas mediante resultados de experimentación numérica. Se han considerado los aspectos epistemológicos subyacentes a la confirmación de una teoría sometida a la presencia, en su sustentación empírica, de aproximaciones numéricas y supuestos no verificables de manera experimental y han explorado el impacto del éxito en la predicción arrojada por la implementación de un modelo y su experimentación, mediante simulación, en la corroboración de una teoría. La importancia epistemológica de la aproximación reside, pues, en la búsqueda de una justificación racional para la aceptación de los conocimientos teóricos producto del proceso de modelado, más que para los resultados de las propias aproximaciones.

En Ramsey (1992), se expone una crítica a Laymon, entre otros filósofos de la ciencia, por reducirse a una concepción estática del concepto de aproximación, al ser esta entendida simplemente como la relación entre la estructura teórica que da soporte al modelo y la estructura empírica del aspecto de la realidad bajo estudio. Ramsey, por el contrario, observa la aproximación como un proceso dinámico que trasciende la mera comparación entre resultados numéricos y medidas experimentales, haciendo que la aproximación adquiera el carácter de estructura empírica.

En problemas de investigación fundamental y aplicada, y con especial frecuencia en el campo de la ingeniería, es común encontrar confusiones entre los conceptos de incertidumbre y error. La incertidumbre está asociada al “error experimental” debido a la configuración del experimento a través del cual se realizan las observaciones y medidas del sistema bajo estudio; en particular, a la resolución de los equipos de medida y, en M&S a las aproximaciones numéricas que deben aceptarse debido a las limitaciones de representación de máquinas discretas (computadores). El tratamiento del error, en el sentido epistemológico (Allchin, 2000) –como la obtención de modelos, implementaciones y resultados finales que no representan de manera correcta las características y comportamientos del sistema del mundo real bajo estudio–, es de importancia crucial para asegurar la validez del modelo desarrollado y, por ende, para garantizar su

utilidad en la solución del problema de investigación subyacente y las aplicaciones relacionadas al objetivo del M&S en el contexto del problema. El concepto de error en M&S se puede definir entonces, según Allchin (2000, p. 1), como “una afirmación falsa que es interpretada y justificada como verdadera”.

Dadas las características y retos conceptuales y técnicos de los mencionados procesos de transformación entre representaciones y, en particular, la propiedad del M&S respecto a que la observación e interpretación de resultados se hace a partir de datos arrojados por una implementación computacional, cuya funcionalidad es independiente de las leyes que rigen el sistema real bajo estudio, existe el riesgo de que el modelo para simulación y su implementación computacional cuenten con una consistencia interna que dé lugar a resultados coherentes con la misma, pero la descripción o los resultados no sean válidos desde la perspectiva de comprensión de la naturaleza del sistema del mundo real. Tal riesgo permite comprender nítidamente la diferencia entre verificación funcional y validación en el ciclo de vida del M&S.

### **Experimentación y simulación**

El algoritmo, y su implementación en un lenguaje de programación, que resulta de la aplicación del proceso de M&S, posibilita la generación de un conjunto de datos numéricos (o alfanuméricos en ciertos casos) que permite extraer conclusiones sobre el comportamiento del modelo (como descripción de un sistema del mundo real) mediante su interpretación a partir de diversas técnicas, algunas tradicionales (interpretación de gráficas, análisis estadístico y prueba de hipótesis, contraste con patrones obtenidos mediante estudios análogos, etc.), otras más recientes y adaptadas a la naturaleza computacional de los métodos de solución (visualización interactiva, comparación entre resultados experimentales y simulaciones, reconocimiento de patrones y clasificación mediante aprendizaje de máquina, etc.); esto ha llevado a algunos autores a considerar la simulación como un proceso de prueba experimental de teorías<sup>3</sup>.

Alici y Edgar (2002) consideran que el concepto de experimentación numérica es sinónimo de simulación, si bien algunos trabajos de corte metodológico definen la simulación como la implementación algorítmica (y en ciertos casos, la ejecución de los algoritmos) del modelo y como un subproceso de la experimentación numérica. Sin embargo, debido a la estandarización del término M&S, tiende a aceptarse que la simulación involucra todos los aspectos de formalización –(desde la perspectiva computacional) del modelo matemático, la implementación algorítmica de dicha formalización y su transcripción a

3 El tema es abordado en detalle por Peschard (2010).

un lenguaje de computador adecuado al tipo de modelo bajo estudio e, incluso, los procesos destinados a la generación de valores numéricos correspondientes a los resultados y la implementación de modos de visualización de los mismos.

En el sentido del conocimiento que se formaliza a través de una teoría (conceptos y sus relaciones), cuya validez es probada de manera empírica (experimentación sistemática y reproducible), la simulación se presenta como un componente análogo a la experimentación que sustenta la validación, mediante observación, de las hipótesis que dan lugar a una teoría, ofreciendo resultados cuantitativos susceptibles de ser interpretados, analizados de manera estadística para prueba de hipótesis, probados en su consistencia en relación con los comportamientos y patrones conocidos del fenómeno o sistema modelado, etc. De este modo, el uso para interpretación, síntesis, validación de teorías y la simulación tiene fuertes analogías con la epistemología de la experimentación.

En Franklin (1986, p. 165) se propone la existencia de diferentes estrategias epistemológicas que pueden ser aplicadas, según el área de investigación científica o desarrollo tecnológico, para justificar la aceptación<sup>4</sup> racional de un resultado experimental llevado a cabo de manera sistemática o, en palabras del propio Franklin, el problema de la epistemología del experimento. Entre las estrategias identificadas en diversos campos científicos, se destacan las siguientes propuestas por Rudge (1998) y aplicadas en dicho trabajo al estudio de Kettlewell (1955) en el campo de la biología evolutiva:

1. Comprobaciones experimentales y de calibración en las que el aparato de medida reproduce fenómenos conocidos.
2. La reproducción de artefactos que se sabe, de antemano, estarán presentes.
3. Descarte de explicaciones alternativas de los resultados obtenidos.
4. Uso de los resultados experimentales en sí mismos para argumentar en favor de su validez.
5. Uso de una teoría bien corroborada (de manera independiente) del fenómeno y que explica los resultados obtenidos.
6. Uso de un aparato de medida basado en una teoría bien corroborada.
7. Uso de argumentos estadísticos (ejecución de múltiples instancias del experimento).
8. Análisis ciego.
9. Intervención, en la que el experimentador manipula el objeto bajo observación.
10. Confirmación independiente, mediante el uso de diferentes aproximaciones experimentales.

4 Franklin se refiere a este punto como creencia (*belief*)

Es notorio que entre estas estrategias sean frecuentes las relacionadas con el uso de aparatos de medida. La validez misma de las observaciones es, entonces, un asunto crítico. En Hacking (1981), se acepta que el uso de dichos aparatos implica necesariamente la incorporación en el estudio experimental de la teoría que sustenta el aparato. Es de admitir que el uso de dispositivos de medida con un grado creciente de sofisticación es, en la mayoría de los casos, inevitable, dada la necesidad de extender las capacidades sensoriales del ser humano en la tarea de medir, de manera cuantitativa y con cierto grado de exactitud, los valores de las variables que describen el estado y la evolución de los parámetros de interés de un sistema bajo observación.

Siguiendo la exposición de Franklin, esta necesidad de contar con mejores métodos y equipos de medida implica una extensión del concepto de observación directa, de manera que incluya explícitamente los supuestos provenientes de las “creencias teóricas”; tal labor fue abordada por Shapere (1982, p. 492), quien definió observación directa sobre el objeto  $x$  si: a) la información sobre  $x$  es obtenida mediante un “receptor” apropiado y b) si tal información es transmitida desde  $x$  hacia el aparato de adquisición de manera directa (sin interferencia). En el caso de la experimentación numérica, inherente a un modelo matemático de mayor o menor rigor formal, las observaciones, es decir, los resultados obtenidos, tienen una utilidad análoga en algunos casos, pero con particularidades distintivas al carácter mismo del M&S, en donde los problemas de ruido por adquisición o error sistemático en la observación no están presentes dado que los datos son obtenidos mediante cálculos aritméticos ejecutados por sistemas informáticos. De otro lado, aparecen en escena el error por aproximación (debido a los métodos numéricos implementados para resolver ecuaciones y sistemas de ecuaciones), el error debido a la representación computacional de datos numéricos reales (p. ej., error de punto flotante) y el concepto de estabilidad numérica relacionado con ambas fuentes de error.

A pesar de las conocidas limitaciones introducidas por los procesos de digitalización (relativas a precisión, estabilidad, *aliasing*, etc.), diversos trabajos se aproximan al estudio de problemas del alto grado de complejidad producido por la experimentación numérica y los comportamientos de sistemas reales observados mediante técnicas de medida. Un ejemplo particularmente interesante se encuentra en Schlatter et ál. (2011), en el que simulaciones de fluidos mediante DNS<sup>5</sup> reportan patrones de turbulencia (con las complicaciones intrínsecas a un fenómeno descrito usualmente como caótico) con un alto grado de cercanía cualitativa y cuantitativa a las estructuras observadas en un túnel de viento (Schlatter, Malm, Brethouwer, Johansson y Henningson, 2011).

5 Simulación Numérica Directa (DNS, por su sigla en inglés).

## Validación en modelado y simulación

A pesar de los avances en la robustez de los modelos matemáticos y las implementaciones computacionales empleados para la caracterización de fenómenos en diversas áreas de las ciencias naturales y sociales (de lo que es representativo el ejemplo de la sección anterior), los fundamentos de la filosofía de la ciencia establecen que una secuencia, más o menos profusa, de valores coincidentes entre medidas experimentales y resultados de simulaciones (considerando, obviamente, errores de observación y aproximación) a lo sumo puede incrementar la confianza en el modelo, pero no es en sí misma una prueba de su validez. Este hecho recuerda la potencial utilidad del falsacionismo popperiano, bajo cuya argumentación una única instancia experimental no coincidente con el modelo empleado para la caracterización de un fenómeno o sistema invalida completamente el modelo

Así pues, desde el punto de vista epistemológico, una de las tareas de mayor dificultad en el ámbito del M&S es la determinación de la validez de la representación de un sistema real provista por un modelo matemático y, por ende, la fiabilidad y utilidad práctica de los resultados arrojados por un proceso de simulación que se fundamente en el modelo en cuestión; consecuentemente, la capacidad del modelo para reproducir de manera robusta las características y comportamiento del objeto, fenómeno o sistema bajo estudio es un indicador del conocimiento que se puede adquirir por medio del análisis de sus características y comportamiento.

### **Verificación y validación en el ciclo del modelado**

La verificación de la consistencia interna del modelo para simulación y la validación del modelo desarrollado en términos de su fidelidad al sistema del mundo real bajo estudio son aspectos indispensables del proceso de modelado que deben llevarse a cabo en cada iteración del ciclo del modelado y, como se expondrá más adelante, en el modelado particular de cada módulo, aspecto, elemento o submodelo involucrado.

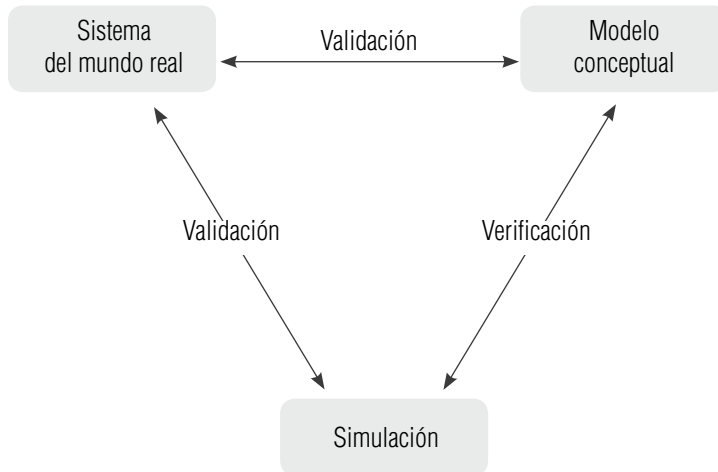
La verificación se desarrolla sobre las diferentes transformaciones de representación que permiten llevar la comprensión y conocimiento general de un objeto o sistema del mundo real a la implementación completa del algoritmo o conjunto de herramientas computacionales para la simulación de su comportamiento. Se puede decir, por lo tanto, que la verificación es el proceso de comprobación de la calidad de la lógica interna y de la funcionalidad computacional resultante de la aplicación del proceso de M&S.



La validación, por su parte, consiste en el proceso de determinar si el modelo para simulación obtenido es una representación precisa y fiel del sistema del mundo real bajo análisis. La validación, por lo tanto, tiene un componente epistemológico más fuerte que la verificación, en la medida en que estudia la validez del conocimiento que se puede extraer de la interpretación del modelo obtenido y, consecuentemente, los resultados que arroja la experimentación numérica desarrollada a partir de la simulación.

De manera análoga al citado triángulo semiótico de Ogden, es posible establecer claramente el ámbito de aplicación y las relaciones sobre las que se desarrollan los procesos de verificación y validación del modelo para la simulación.

### Técnicas de validación de modelos en modelado y simulación



**Figura 4.** Ámbito de ejecución de las tareas de verificación y validación en función de las relaciones entre el sistema del mundo real, el modelo conceptual que abstrae dicho sistema y la implementación computacional para simulación del modelo planteado.

Como se ha mencionado, los procesos de verificación y validación propios del ciclo de vida del modelado deben llevarse a cabo de manera permanente durante el desarrollo del modelo para simulación. Sin embargo, la aplicación por sí sola de pruebas de verificación funcional y validez conceptual no basta para garantizar la eficiencia ni, probablemente, el éxito final de la aplicación del proceso de M&S a la solución de un problema específico de investigación, máxime cuando, en la práctica, ningún modelo para simulación puede ser verificado y validado en un 100% (Carson, 2002). Por esto, conviene establecer aproximaciones, prácticas y principios aplicables al proceso mismo de desarrollo del modelo, de manera que se facilite la consecución de un nivel alto de calidad, reforzado por las propias pruebas de validez que deben realizarse en cada proceso.

Dado el carácter estratégico que desde hace tres décadas empezaron a tener los estudios y propuestas tecnológicas y metodológicas fundamentados en el M&S, el establecimiento de buenas prácticas de desarrollo de modelos en la búsqueda de resultados exitosos, útiles y robustos ha cobrado importancia, especialmente desde finales de la década de 1980. Algunos trabajos incorporan propuestas para la evaluación de aspectos que van desde técnicas aplicables a procesos de conceptualización hasta métodos de verificación funcional de las herramientas informáticas desarrolladas que permiten la simulación del modelo construido.

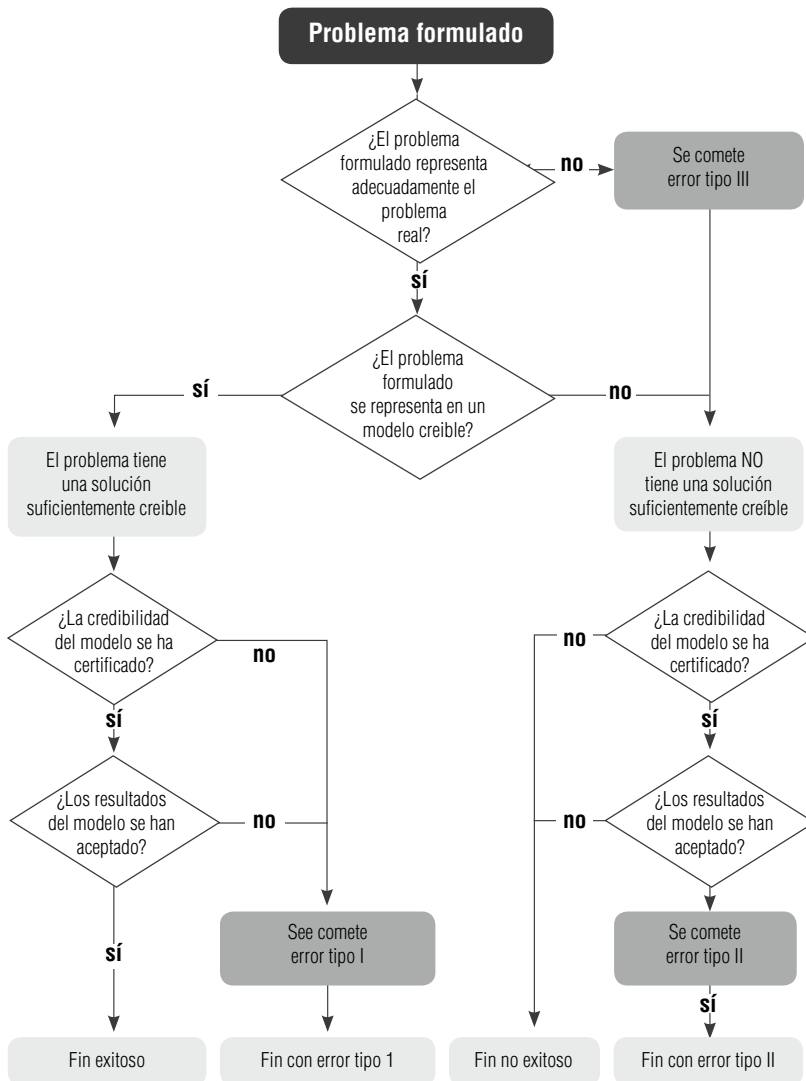


Figura 5. Errores en el proceso de M&S según Balci, 1998 (adaptación de Cadavid (2010, p. 52).

En Balci (1998) se establece una caracterización de errores que pueden presentarse en el desarrollo de un modelo para simulación, según la fidelidad, credibilidad y verificación funcional y matemática del modelo obtenido, definiendo, por medio del proceso presentado en la figura 5, los errores de tipos I, II y III. Del exhaustivo trabajo de Balci se pueden extraer, de manera general, además, los grupos de técnicas más representativas (y de utilidad práctica en M&S), tal y como lo presentaron Xiang, Kennedy y Madey (2005, p. 48):

- **Validación de apariencia:** contrastar, según la experiencia del responsable del modelado y de expertos en el área de aplicación, si el comportamiento presentado por la simulación del modelo corresponde, razonablemente, a lo esperado según su formulación y el sistema del mundo real bajo estudio. Se puede conseguir mediante el análisis de gráficas y animaciones que permitan hacer un seguimiento a los comportamientos de los elementos del modelo.
- **Rastreo:** de manera similar a la inspección de variables en los procesos de *debugging* (eliminación de errores) en programación de computadores, se puede hacer un seguimiento de los valores que toman las variables que determinan el estado y la dinámica del modelo.
- **Validación interna:** comparar los resultados de diferentes instancias de la misma simulación con diferentes semillas para la generación de números aleatorios. Es especialmente útil en experimentación numérica para modelos con carácter estocástico.
- **Validación mediante datos históricos:** esto se ejecuta cuando hay disponibilidad de datos obtenidos en ciclos anteriores o estudios de M&S aplicados a problemas análogos. Parte de los datos será usada entonces en la construcción del modelo y otra parte en las pruebas de su desempeño a partir de los comportamientos exhibidos por la simulación del modelo.
- **Análisis de sensibilidad:** se presenta la entrada al sistema desarrollado con variaciones sistemáticas en los valores de entrada y de los parámetros internos del modelo implementado para observar los efectos de dichas variaciones en la salida (comportamiento) del modelo, comprobando, como sería de esperar, que dichos efectos sean equivalentes en la simulación y el comportamiento del sistema del mundo real.
- **Validación predictiva:** aplicable cuando existen datos empíricos de observaciones experimentales rigurosas, realizadas sobre el sistema del mundo real bajo estudio. Consiste en la comparación de los patrones de comportamiento obtenidos mediante los dos tipos de observación.

- **Tests de Turing:** en implementaciones suficientemente elaboradas, se puede comprobar si un experto es capaz de diferenciar los resultados arrojados por la simulación del modelo desarrollado de aquellos obtenidos mediante técnicas experimentales aplicadas al sistema del mundo real.

En Balci (1997, p. 136) se propone una serie de principios que, de ser aplicados de manera consistente y rigurosa, facilitarían el diseño de las actividades particulares del ciclo de vida del M&S en la construcción de un modelo capaz de superar las pruebas de validez pertinentes según su naturaleza. Estos principios son:

- La verificación y la validación deben ser realizadas a lo largo de todo el ciclo de vida del M&S.
- El resultado de la verificación y la validación no debe considerarse como una variable binaria donde el modelo o simulación es absolutamente correcto o incorrecto.
- Un modelo de simulación se construye para alcanzar unos objetivos y su credibilidad se juzga con respecto a esos objetivos.
- La verificación y la validación exigen independencia para evitar el sesgo del desarrollador.
- El proceso de verificación, validación y acreditación es difícil y requiere creatividad y perspicacia.
- La credibilidad sólo puede ser exigida tras cumplir las condiciones requeridas para que el modelo o simulación pueda ser verificado, validado y acreditado.
- Una prueba completa del modelo para simulación no es posible.
- El proceso de verificación, validación y acreditación debe ser planificado y documentado.
- Los errores de tipo I, II y III (Balci, 1998) deben ser prevenidos a priori.
- Los errores deben ser detectados tan pronto como sea posible en el ciclo de vida del M&S.
- El problema de la respuesta múltiple debe ser detectado y resuelto apropiadamente.
- La prueba exitosa de cada submodelo (módulo) no implica una credibilidad general del modelo.
- El problema de la doble validación debe ser detectado y corregido apropiadamente.

- La validación del modelo para simulación no garantiza la credibilidad y aceptabilidad de los resultados de la simulación.
- Una buena formulación del problema bajo estudio es esencial para la aceptabilidad y acreditación de los resultados del proceso de M&S.

Sargent (2010), por su parte, ofrece algunas recomendaciones que pueden ser aplicadas de manera secuencial, a manera de procedimiento, basadas en una formalización propia del ciclo del modelado, o “ciclo de vida del modelado”, según la analogía extraída de la ingeniería de software, y que implica un uso continuo del modelo obtenido.

Sargent sintetiza su propuesta en los siguientes pasos:

1. Llegar a un acuerdo entre el responsable del M&S y los usuarios (patrocinadores) del modelo y sus resultados, especificando la aproximación para la validación del modelo y las técnicas de validación que se emplearán en el proceso.
2. Especificar a priori el grado de exactitud de los resultados obtenidos para las variables de interés para el estudio antes de iniciar la implementación del modelo.
3. Probar, en todos los casos en los que sea posible, las suposiciones e hipótesis que dan soporte al modelo.
4. En cada iteración del ciclo del modelado, llevar a cabo al menos la validación de apariencia sobre el modelo conceptual empleado.
5. En cada iteración del ciclo del modelado, comprobar, mediante la implementación de la simulación obtenida, el comportamiento de cada aspecto del modelo susceptible de ser observado.
6. En al menos la última iteración del ciclo de modelado empleada, comparar el modelo según sus objetivos y los datos correspondientes al comportamiento del sistema desarrollado (salida) para al menos dos condiciones experimentales (escenarios) diferentes.
7. Documentar el proceso de validación como un aspecto fundamental de la documentación general del proceso de modelado.
8. Si el modelo ha de ser empleado más de una vez para el soporte de actividades de una organización por un periodo dado, establecer un calendario de revisiones periódicas de la validez del modelo.

## Referencias

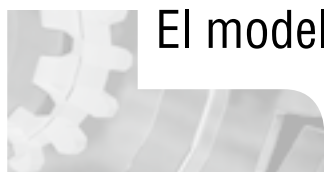
- Alici, S. y Edgar, T. F. (2002). Nonlinear Dynamic Data Reconciliation via Process Simulation Software and Model Identification Tools. *Ind. Eng. Chem. Res.*, 41: 3984-3992.
- Allchin, D. (2000, mayo). The Epistemology of Error. *Philosophy of Science Assoc.*, Vancouver.
- Balci, O. (1998). Verification, Validation and Testing. En Banks, J. (ed.), *Handbook of Simulation* (pp. 335-394). New York: John Wiley & Sons.
- Balci, O. (1997). Verification, Validation and Accreditation of Simulation Models. En *Proceedings of the 1997 Winter Simulation Conference* (pp. 698-705). Atlanta GA, EE. UU.
- Bunge, M. (1969). Analogy, Simulation, Representation. *Revue Internationale de Philosophie*, 87: 16-33.
- Cadavid, L. (2010). *Propuesta para la medición del ajuste entre las metáforas organizacionales y las herramientas de modelado* (tesis de maestría). Universidad Nacional de Colombia, Medellín.
- Carson, J. S. (2002). Model Verification and Validation. En *Proceedings of the 2002 Winter Simulation Conference* (pp. 52-58). San Diego CA, EE. UU.
- Colwell, R. (1999). Complexity and Connectivity: A New Cartography for Science and Engineering. En *Remarks from the American Geophysical Union's Fall Meeting*. San Francisco CA, EE. UU.
- Franklin, A. (1986). *The Neglect of Experiment*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Guala, F. (2002). Models, Simulations, and Experiments. En Magnani, L. y Nersessian, N. (Eds.), *Model-Based Reasoning: Science, Technology, Values* (pp. 59-74). New York: Kluwer Academic/Plenum Publishers.
- Hacking, I. (1981). Do We See Through a Microscope? *Pacific Philosophical Quarterly*, 63: 305-322.
- Hempel, C. G. (1966). *Philosophy of Natural Science*. Englewood Cliffs, N. J.: Prentice-Hall.
- Kettlewell, H. B. D. (1955). Selection Experiments on Industrial Melanism in the Lepidoptera. *Heredity*, 9: 323-342.

- Kuhn, T. S. (1961). *La función de la medición en la física moderna*. México: Fondo de Cultura Económica.
- Laymon, R. (1990). Computer Simulations, Idealizations and Approximations. En *PSA: Proceedings of the Biennial Meeting of the Philosophy of Science Association* (pp. 519-534). Minneapolis MN, EE. UU.
- Magee, B. (1985). *Popper*. Londres: Fontana Press.
- Maldonado, L. F. (2012, enero). La espiral del modelamiento. En *Sexto Encuentro Nacional y Segundo Regional de Experiencias Curriculares y de Aula en Educación en Tecnología en Informática*. Pasto, Colombia.
- Peschard, I. (2011, diciembre). *Computer Simulation and the Quest for Novel Epistemic Novelty*. 2011 Eastern Division Invited Paper in the Session: Author Meets Critics: Eric Winsberg, Science in the Age of Computer Simulation. Washington D. C. EE. UU.
- Peschard, I. (2010, mayo). Is Simulation an Epistemic Substitute for Experimentation? En *Scientific Models and Simulations (4) Worskhop*. Toronto, Canadá.
- Ramsey J. L. (1992). Towards an Expanded Epistemology for Approximations. En *PSA: Proceedings of the Biennial Meeting of the Philosophy of Science Association 1992*.
- Richards, I. A. y Ogden, C. K. (1989, junio 26 [1923]). *The Meaning of Meaning*. Mariner Books; Reissue edition.
- Rudge, D. W. (1998). A Bayesian Analysis of Strategies in Evolutionary Biology. *Perspectives on Science*, 6: 341-360.
- Sargent, R. G. (2010) Verification and Validation of Simulation Models. En *Proceedings of the Winter Simulation Conference* (pp. 166 -183). Baltimore MD, EE. UU.
- Schichl, H. (2004). Models and the History of Modeling. En Kallrath, J. (ed.), *Modeling Languages in Mathematical Optimization* (pp. 25-36). Boston MA: Kluwer.
- Schlatter, P., Malm, J., Brethouwer, G., Johansson, A.V. y Henningson, D. S. (2011). Large-scale Simulations of Turbulence: HPC and Numerical Experiments. *7th International Conference on E-Science (e-Science), IEEE*, 5-8, 319-324.

- Shannon, R. y Johannes J. D. (1976). Systems Simulation: the Art and Science. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, 6(10): 723-724.
- Shapere, D. (1982). The Concept of Observation in Science and Philosophy. *Philosophy of Science*, 49(4): 485-525.
- The NSF Blue Ribbon Panel on Simulation-Based Engineering Science (2006, mayo). *Simulation - Based Engineering Science: Final Report*. NSF, EE. UU.
- Turnitsa, A., Padilla, J. J. y Tolk C. (2010). Ontology for Modeling and Simulation. En *Proceedings of the 2010 Winter Simulation Conference* (pp. 643-651). Baltimore MD, EE. UU.
- Xiang, X., Kennedy, R. y Madey, G. (2005, abril). Verification and Validation of Agent-based Scientific Simulation Models. En *Agent-Directed Simulation Conference* (pp. 47-55). San Diego CA, EE. UU.



## Capítulo 3



# El modelamiento en economía

Raul Drachman\*  
Reuma De Groot\*\*

### Introducción

**M**odelar probablemente sea la más notoria de las prácticas que les son comunes a la economía y a la ingeniería. La complejidad en todos sus aspectos y dimensiones está presente en ambas disciplinas, y de ahí el papel fundamental que cumple el modelamiento en ellas. La ciencia económica, sin embargo, es especial en el sentido de que no puede concebirse sin modelos, y esa dependencia la hace potencialmente muy útil como caso de estudio para un mejor uso de los modelos en otras ramas del saber. Aunque haremos mención a algunos de sus hitos, no es la evolución histórica del modelamiento en economía lo que más nos interesa aquí, sino qué y cómo se hace, y qué enseñanzas pueden trasladarse de esa experiencia. Además, en los elementos básicos que atañen al uso de las representaciones verbal, diagramática, matemática y computacional (esta última, con excepción de su alcance), y abstrayéndonos de su contenido científico propio, el modelamiento en economía no ha cambiado en lo esencial en las últimas décadas.

Se ha resaltado en este libro la analogía de la práctica del modelamiento con una espiral, que mantiene su total vigencia en lo que concierne a los modelos económicos. Esta analogía representa el tránsito continuo de teoría a modelo y viceversa, en una evolución que busca llegar a un mejor entendimiento de algún fenómeno (punto imaginario asociable al centro de la espiral). En ese

\* Ph. D. y docente investigador de la Universidad Hebrea de Jerusalén. Grupo de investigación Kishurim. Correo electrónico: drachil@netvision.net.il

\*\* Ph. D. y docente investigador de la Universidad Hebrea de Jerusalén. Grupo de investigación Kishurim. Correo electrónico: msruma@mscc.huji.ac.il

tránsito se enriquecen mutuamente los procesos de comprensión de la realidad y la calidad y precisión del modelo. En efecto, Samuelson y Nordhaus (1998) definen un modelo como un marco formal que permite representar las características básicas de un sistema complejo mediante unas pocas relaciones centrales. Estos modelos –agregan los autores– pueden asumir la forma de gráficos, ecuaciones matemáticas y programas de computación. La idea clave aquí es simplificar sin perder lo esencial, pero a su vez también dar base a un proceso dinámico e iterativo de sofisticación (del modelo) que permita que esa comprensión de “la realidad” sea, gradualmente, la mejor posible.

## Una cuestión de importancia

Al tratar de explicar cierto fenómeno ya ocurrido o de predecir un resultado de política económica, lo que distingue principalmente un modelo de otro en el arsenal del economista es la importancia relativa que el autor del modelo haya dado a un factor u otro; se entendiendo por “factor” cualquier elemento presente en el modelo, incluyendo especialmente las variables que se usarán y la selección y los detalles de construcción de las ecuaciones componentes (como formalización de sus relaciones), que obviamente encierran también supuestos relativos al comportamiento de las unidades o agentes económicos y, en general, a la forma de operar del modelo (véase, por ejemplo, Holcombe, 1989).

Esa importancia relativa puede ser imaginada como un valor en la escala que va de 0 (el factor fue ignorado, voluntaria o involuntariamente) a 1 (el factor se toma en cuenta y “la forma en la que el modelo fue construido” asegura que sea preponderante en cuanto a la magnitud del efecto o a su velocidad de manifestación). Así, por ejemplo, al analizar la economía de un país X, un economista podrá usar un modelo que no tome en cuenta el sector externo (importación y exportación de bienes y servicios, movimientos de capital con el exterior, etc.) si considera esa economía como “cerrada”; es decir, prácticamente aislada del resto del mundo y autosuficiente en todo lo económico. El economista deberá tener presente que eso es sólo una aproximación a una realidad más compleja y que, por lo tanto, la herramienta y sus resultados deberán ser usados con cautela; usará ese modelo porque simplificará su tarea y –así espera– aclarará una imagen económica que de otra forma le sería imposible comprender. Durante mucho tiempo, EE. UU. fue considerado una economía relativamente “cerrada” (dado el predominio de la actividad puramente interna allí), y los modelos inspirados en esa economía fueron muchas veces “de economía cerrada”. Usar esos mismos modelos para una “economía abierta” como la de Japón, por ejemplo, para las mismas épocas, hubiera sido inapropiado o, por lo menos, hubiera requerido de justificación adecuada. Si bien siempre hubo

conciencia de las limitaciones que implicaba ignorar un “subsector” generalmente tan importante como el externo en un modelo macroeconómico, no fue hasta las décadas 1960-70 en que se comenzó a dar al punto la atención merecida (véase, por ejemplo, Barro y Grossman, 1976; Dornbusch, 1980). Y hay, por supuesto, muchos otros ejemplos de modelos económicos caracterizados por ignorar o resaltar la importancia de ciertos factores o elementos a cuenta de otros como intento de aproximarse a una realidad determinada (ejemplos clásicos son el rol del dinero en la economía, los mercados de valores financieros, la forma de disponer de los ahorros, etc.). Evidentemente, todas estas “simplificaciones” requieren de un sustento teórico para tener sentido.

En un contexto relacionado, un caso especial que cabe destacar en la evolución de los modelos es el referente a las expectativas. Estas siempre tuvieron un rol importante en la teoría económica, pero desde comienzos de la década de 1960 (con el trabajo pionero de Muth [1960, 1961], “redescubierto” por Walters [1971]), y especialmente en los años 70 (Lucas [1972, 1973, 1976], Sargent [1973], Mussa [1975], Barro [1976], Sargent y Wallace [1973 y 1976], etc.) y hasta ya bien entrados los años 80, tuvo lugar una verdadera revolución intelectual con la introducción del modelo de “expectativas racionales”. Este propone que las expectativas (de precios, tipos de cambio, tasas de interés, nivel de producción o empleo, etc.) se generan en consistencia total con las mismas ecuaciones que componen esos modelos; es decir, se derivan de ellos en forma lógica, “racional”, en vez de estar dictadas por esquemas más o menos arbitrarios. Esto trajo consecuencias de gran alcance que afectaron el pensamiento económico y, con él, la forma de construir modelos (véase Mishkin, 1995).

La diferenciación de modelos con base en la mayor o menor importancia relativa adjudicada a ciertos factores es parte de esa “esencia” estable a la que hicimos mención más arriba, y es común a todos los modelos económicos, pasados y presentes. El que esas diferencias hayan persistido se debe presumiblemente a que los economistas no se han puesto de acuerdo en cuanto a la composición de la lista de esos factores, a sus pesos relativos, a la naturaleza de las relaciones que los ligan, o a la forma en que todo esto puede ser medido (previa “estimación” de los parámetros y especificación formal de esas relaciones o ecuaciones, ya que sus valores reales nunca son conocidos). En otras palabras, la complejidad de esa realidad y la necesidad de entenderla son la razón de ser de los (distintos) modelos en economía y la que los ha perpetuado en el marco de una evolución que no parece tener fin.

Las secciones que siguen en este capítulo representan un intento de extraer de la experiencia de modelamiento en la ciencia económica algunos elementos que consideramos útiles cuando el foco de atención está en el uso del modelamiento en otra disciplina, como es la ingeniería en el proyecto en el que estas ideas se incu-

baron. Comenzando por una reseña breve del papel que cumplen los modelos en economía, seguimos con una presentación de la forma en que estos modelos pueden clasificarse para permitir un análisis ordenado de los mismos y un mapeado más claro de las relaciones interdisciplinarias que los modelos de cada tipo puedan tener. Examinamos luego el valor percibido, o esperado, de los modelos económicos por sus usuarios, los usos comunes de los modelos y sus limitaciones. Cerramos el capítulo con algunas conclusiones, recomendando ciertos énfasis y prioridades al planear actividades que involucren el diseño y la utilización de modelos.

## El papel de los modelos en la ciencia económica

Explícita o implícitamente, los modelos están siempre presentes en la economía. Además de permitir medir, estimar o predecir efectos de medidas o política económicas y así, por ejemplo, sentar sobre una base más sólida la toma de decisiones, los modelos juegan un papel fundamental también en “la construcción de la teoría económica” y ayudan a entender conceptos y fenómenos a nivel teórico. A ese nivel, podría decirse que en economía no hay diferencia sustancial entre la teoría y el modelo, todo es un modelo. Distintas teorías económicas o distintos enfoques y explicaciones de un fenómeno económico se corresponden con la adopción de un modelo económico determinado, distinto de otros a veces sólo a nivel mental y no siempre conscientemente. En efecto, para ciertos autores, la diferencia entre modelo y teoría en economía es mayormente cosmética. Por ejemplo, para Begg, Fischer y Dornbusch (2000), mediante un modelo o teoría se puede hacer una serie de simplificaciones de las que puede deducirse la forma en la que la gente actúa: se trata de una simplificación deliberada de la realidad. Esta versión simplificada de la realidad se refleja al abstraer ciertos aspectos (considerados por su autor, como dijimos, menos importantes para el problema en cuestión) o proponer relaciones funcionales distintas, o resaltar la prioridad de algunas de ellas sobre otras, o proponer un escenario de acción, supuestos básicos, etc., diferentes a los usados en otros modelos (véase Walsh, 1987). Esa simplificación de la realidad se considera necesaria para poder entenderla.

La explicación provista por un modelo busca basarse en la lógica, por lo cual en definitiva el modelo será tan bueno como sus supuestos básicos (incluyendo la especificación de las ecuaciones, sus parámetros, etc.). En economía, además, el supuesto de que los agentes (individuos, empresas, gobierno, etc.) actuarán en forma lógica, racional, consistente —que no es un supuesto menor—, muchas veces no se cumple; en otros modelos económicos ni siquiera se asume. Dado que la lógica interna del modelo sí se respeta, surgen de aquí preguntas que pueden afectar la validez empírica del modelo. Varios autores (véase

Evans, 1997) han destacado el papel central que cumple la coherencia lógica interna en los modelos, ya que esta –quizás aún antes de considerar la consistencia externa del modelo, en cuanto a si sus resultados se corresponden o no con las observaciones de la realidad– da a esos resultados una validez a priori.

## ¿Qué es lo que se simplifica?

El foco de este análisis es resaltar el hecho de que el modelo –especialmente en economía– representa un intento de entender una realidad muy compleja. El autor del modelo, o quien lo use, deberá estar atento a esa separación o diferenciación entre realidad y modelo. En principio, podría decirse que donde la realidad sea plenamente comprendida y donde todos los valores de los parámetros en juego y las cantidades o medidas sean sabidos, no habrá lugar a modelo como tal. Y aquí probablemente encontremos una diferencia entre la economía (y otras ciencias sociales) y la ingeniería, tanto a nivel teórico como práctico. En ingeniería y en las ciencias exactas en general existen realidades totalmente entendidas y explicadas. Referirse a un modelo, en este caso, sería equivalente a referirse a la realidad, que para entenderla no fue necesario simplificarla. Esto, como dijimos más arriba, no se da, o sería muy raro, en economía<sup>1</sup>. Y también a nivel práctico pueden concebirse problemas o situaciones que la ingeniería los resolvería en forma total y exacta sin necesidad de ninguna simplificación (ni, por ende, de modelo).

El párrafo anterior podría generar alguna pregunta con respecto a la cobertura del concepto de modelo. ¿Sólo si hay simplificación este tiene razón de ser?, ¿no estaría esto en contradicción con lo expresado en el capítulo sobre las máquinas? En la figura 1 se muestra el modelo del *shadoof*. La realidad modelada allí es una palanca con todos sus elementos componentes y actuantes. A pesar de que esta “realidad” es 100% comprendida, no hay duda de que ambas partes (diagramática y matemática) de la figura constituyen un modelo. Por un lado, y aunque no quede en evidencia a primera vista, sí hay cierta simplificación de una realidad compleja en ese modelo; por ejemplo, se desprecia el efecto del rozamiento que pueda existir en el punto de apoyo. Pero aun ignorando esta sutileza, el esquema y las ecuaciones allí presentadas cumplen una función de modelo, en el sentido de que permiten su uso en lugar de tener que recurrir a la realidad (es decir, usar una palanca real, material) para evaluar diferentes constelaciones de parámetros o variables. Así, por ejemplo, si el largo del brazo  $x_2$  fuese el doble de lo que es, sin otros cambios, responder a la pregunta de cuánto

1 Una posible excepción serían los modelos contables, por ejemplo de la contabilidad nacional (ver más adelante). Estos modelos no tienen componentes funcionales de comportamiento, sino sólo identidades y sus corolarios inmediatos.

tendría que ser el peso del agua para balancear al contrapeso dado no requeriría construir una nueva palanca con esos datos nuevos, sino simplemente aplicar el modelo haciendo los cálculos necesarios. Nos ahorraríamos la construcción material de un objeto (que en la práctica podría ni siquiera ser viable, por razones diversas). En este sentido, podemos ver el modelo como un instrumento útil, que provee un servicio importante. Vista de este modo, la simplificación de la realidad, tornándose manejable y más entendible, es consonante con la facilitación posibilitada por el modelo. Ese “servicio”, en lo esencial, es común a todos los modelos, incluyendo a los de economía e ingeniería.

## Elementos propios, a veces comparables

A nivel general, los modelos en economía comprenden elementos o conceptos que son comparables a los usados en ingeniería, aunque algunos de ellos pueden cumplir una función distinta o tener una importancia distinta. El concepto de equilibrio, por ejemplo, es cardinal en los modelos económicos, al punto que sería imposible imaginarse (la mayoría de) esos modelos sin tal concepto. Equilibrio implica, en economía, un conjunto de magnitudes (precios, cantidades, ritmos de cambio, etc.) para los que, en un momento determinado, no existen razones para que se modifiquen o, en otras palabras, donde, de acuerdo con el modelo, no hay fuerzas que los hagan cambiar (e idealmente, en cualquier otro momento, hay fuerzas que tienden a acercar esas magnitudes a sus valores de equilibrio). Veamos un ejemplo. Con base en una cantidad de supuestos, la teoría económica postula que si para un precio determinado del producto  $X$  la cantidad demandada es mayor que la ofrecida, habrán fuerzas que hagan subir ese precio. Un posible modelo para analizar este fenómeno sería el mostrado en la figura 1 —que es quizás el más básico y común de los modelos económicos—, donde se muestra gráficamente la curva (o función) de la demanda ( $D$ ) y la de la oferta ( $S$ , por la sigla inglesa de Supply) para un cierto producto, por ejemplo bicicletas.

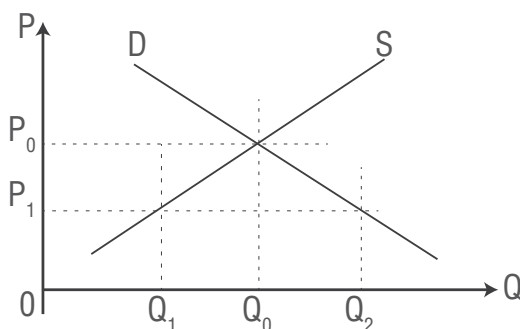


Figura 1. Un simple modelo de oferta y demanda.

La función de demanda,  $D$ , está dada por una curva (o recta, en el dibujo) decreciente, indicando que la cantidad deseada (“demandada”) de bicicletas en un período dado (por ejemplo, un mes) y por un público y en un lugar determinados (por ejemplo, los habitantes de Bogotá) será

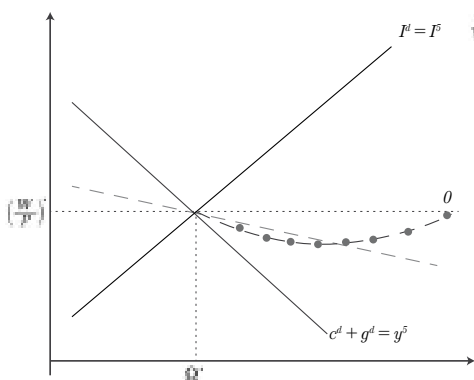
menor cuanto mayor sea el precio de las bicicletas. El modelo también postula (con base en un corpus importante de teoría económica) que la cantidad ofrecida (“ofertada”) por los fabricantes de bicicletas en Bogotá será mayor cuanto más alto sea el precio de las bicicletas. Como puede verse en el dibujo, hay un precio  $-P_0-$  para el cual la cantidad ofertada es igual a la cantidad demandada. Un precio inferior a  $P_0$ —por ejemplo  $P_1$ —resultará en un “exceso de demanda”,  $Q_2-Q_1$ : esa cantidad de bicicletas no será posible comprar o vender, en ese mes en Bogotá, dado que el precio es demasiado bajo y sólo se producirán  $Q_1$  bicicletas. En condiciones determinadas—como las de competencia perfecta (otro supuesto clásico en economía)—, algunos de quienes se hayan quedado sin comprar buscarán la posibilidad de conseguir una bicicleta ofreciendo pagar un precio algo mayor. Los fabricantes, por su lado, notarán la posibilidad de vender más bicicletas a un precio algo mayor a  $P_1$  y las producirán. En resumen, este exceso de demanda trae consigo fuerzas capaces de empujar el precio hacia arriba. ¿Hasta dónde? Hasta  $P_0$ . ¿Por qué? Porque para un precio superior a  $P_0$  se generaría un exceso de oferta, situación similar pero opuesta a la anterior que, mediante un razonamiento análogo y en las mismas condiciones de competencia perfecta, empujaría el precio hacia abajo. Vemos aquí el significado del par  $(P_0, Q_0)$  como “punto de equilibrio” (estable), donde se da la igualdad entre lo que hay y lo que se quiere que haya (y para el que existen, idealmente, fuerzas que tienden a mantenerlo, mientras no cambien otras cosas).

## Modelos no necesariamente dinámicos

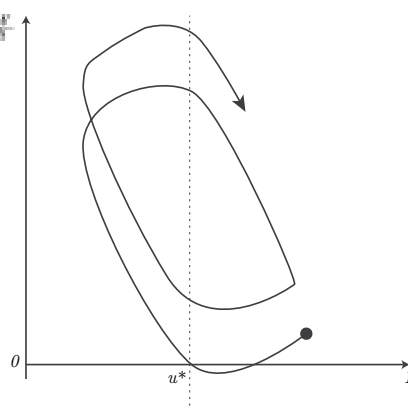
En este simple modelo hay varios puntos de interés para nuestros propósitos. Primeramente, vemos que, así como está presentado, se trata de un modelo estático, no dinámico. Dados todos los supuestos a nivel teórico (que resultan, por ejemplo, en que una curva de demanda sea decreciente, etc.) y otros a nivel más práctico (por ejemplo, que las curvas de demanda y de oferta tengan la forma que tienen y estén situadas donde están), el par  $(P_0, Q_0)$  es el punto de equilibrio. No se está preguntando aquí cuál era el precio anterior, ni cómo llegó a ser  $P_0$ , ni otras preguntas que harían referencia al camino que describirían  $P$  y  $Q$  al pasar de un punto de equilibrio a otro. En economía, gran parte de los modelos son estáticos; se representan por sistemas de ecuaciones (generalmente mucho más complejos que el de las dos ecuaciones representadas por las curvas de la figura anterior) que se resuelven gráfica o matemáticamente para encontrar los valores de equilibrio. La introducción de supuestos para analizar la dinámica del sistema (por ejemplo, una o más ecuaciones de ajuste), que resultarían en una o más ecuaciones diferenciales o de diferencias que se podrían resolver analítica o gráficamente, se hace menos frecuentemente. En efecto, el

análisis estático, o también el de “estática comparativa” —cuando se comparan dos o más puntos de equilibrio obtenidos (para distintos puntos en el tiempo) al cambiarse algunos de los supuestos, o luego de un *shock* externo—, se considera en muchos casos suficientemente rico en contenido, y del cual se pueden sacar valiosas conclusiones (véase, por ejemplo, Samuelson, 1983).

¿A qué se debe esta aparente concentración en el análisis estático, cuando en ingeniería, por ejemplo, se da más importancia al análisis dinámico? Aparte de razones de complejidad o manejabilidad matemática, la razón parece estar dada por la utilidad que tal análisis podría tener para la práctica económica. En teoría, es interesante ver el trayecto de un punto de equilibrio a otro, y, en efecto, a nivel teórico el análisis dinámico se hace con relativa asiduidad (véase, por ejemplo, los dos gráficos en la figura 2 [referidos, en este caso, al mercado de trabajo] que muestran gráficamente la convergencia del salario real o del ritmo de cambio del salario nominal hacia puntos de equilibrio en distintas condiciones; véase también Allen, 1976). Pero a nivel práctico, la utilidad se ve reducida si se considera que, en el tránsito de un punto de equilibrio a otro, el tiempo transcurrido sería más que suficiente para que uno (o muchos) de los supuestos que se tomaron como fijos, varíen. En otras palabras, y usando la figura 3 como base, sólo en teoría se llegaría de  $(P_0, Q_0)$  a  $(P_1, Q_1)$  al “moverse” (por ejemplo, debido a algún cambio en los supuestos) la curva de demanda de  $D_0$  a  $D_1$ , porque en el ínterin seguramente ocurriría algún otro cambio (en este caso simple, en la posición de las curvas  $D$  o  $S$ ), dando inicio a otro trayecto y ciclo de convergencia.



**Figure 1.8**  
Convergence to the market-clearing conditions



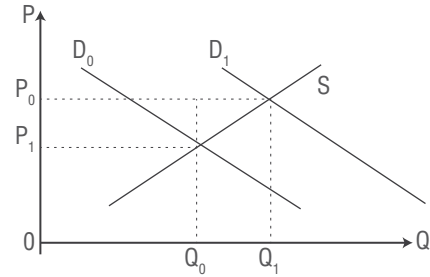
**Figure 5.5**  
Wage inflation and unemployment with rising inflationary expectations

**Figura 2.** Dos casos de representación gráfica de convergencia en modelos dinámicos  
*Fuente:* Barro y Grossman, 1976.



## “Mientras no cambien otras cosas”

Esto dijimos al final de un párrafo anterior. Ciertamente, un aspecto importante subyacente en el análisis anterior es el papel jugado en los modelos económicos por todos aquellos factores que se consideran fijos en el análisis. Esto es lo que en economía se denomina el supuesto de *ceteris paribus*, que en definitiva condiciona cualquier resultado obtenido al resolver un modelo. En la figura 3, por ejemplo,



**Figura 3.** Cambio en el punto de equilibrio debido a un cambio en (la posición de) la curva de demanda.

el cambio en la posición de la curva de demanda se debió a algún cambio en lo que hasta el momento se consideraba como fijo. Así, podría ser que  $D_0$  se haya transformado en  $D_1$  debido al surgimiento de expectativas de aumento de precios de las bicicletas el mes próximo (por ejemplo, motivadas por rumores sobre la subida de los precios del aluminio en los mercados mundiales). Este factor (“expectativas”), o no estaba considerado en el modelo “anterior” ( $D_0$  y  $S$ ), o lo estaba mediante algún parámetro o valor de algunas variables consideradas fijas y que eventualmente cambiaron. Conviene anotar que este punto es de significación cuando se hace referencia a la diferencia entre la presentación gráfica de un modelo y su presentación algebraica. Gráficamente (en dos dimensiones, como generalmente es el caso) representamos dos variables, mientras que todas las demás (cuya presencia podría sugerir la teoría) se mantienen (o se asumen) fijas.

En la representación algebraica, sin embargo, esto no es necesariamente así, ya que las ecuaciones que forman parte de un modelo pueden, en principio, relacionar una variable dependiente con más de una variable independiente. Cuando esas otras variables no cumplen un papel central en el análisis (como las expectativas en el ejemplo anterior), o se quiere destacar que no son generadas por el modelo, sino determinadas por agentes externos –es decir, no son endógenas sino exógenas–, suele usarse una notación que destaca este aspecto, transformando, a todos los efectos prácticos, esas variables en lo que serían parámetros. Así, por ejemplo, la función de demanda, en la que se relaciona la cantidad demandada ( $Q^d$ ) de un bien con su precio ( $P$ ) y otras variables –como podrían ser el ingreso ( $I$ ), las expectativas ( $E$ ), las modas ( $M$ ), los precios de bienes relacionados o sustitutos ( $R$ ), etc.– podría representarse así:

$$Q^d = Q^d (P, I, E, M, R, \dots),$$

O de esta otra forma, si se considera a todas esas otras variables como fijas y que, en particular, no se las representará gráficamente en forma demasiado explícita:

$$Q^d = Q^d_{I,E,M,R}(P).$$

Así, cambios en I, E, M o R moverán la curva de demanda (lo que los economistas llaman un movimiento **de** la curva y no **sobre** la curva), lo cual es cierto debido al espacio bidimensional usado en la representación gráfica (e implícitamente asumido mentalmente). El *ceteris paribus* —es decir, el suponer que en el *interin* todo lo demás no ha cambiado— es un concepto de aplicación puramente teórica en economía y en otras ciencias sociales, pero puede tener sentido práctico en ingeniería y ciencias exactas. Es posible, por ejemplo, considerar como realmente fijos una serie de variables o parámetros en un experimento de física, o incluso imaginar condiciones que podrían darse naturalmente en ambientes reales determinados (por ejemplo, la falta de resistencia del aire en el espacio interplanetario). En economía, sin embargo, sería muy raro o imposible contar con la total fijeza de un conjunto significativo de variables en cualquier contexto empírico. Posible excepción serían ciertas variables de política (por ejemplo, la tasa de un impuesto o del interés que paga el banco central sobre los depósitos de los bancos comerciales, o la cantidad nominal de dinero en algunas situaciones, etc.), pero aun así, otras variables menos controladas (pero ajenas al modelo) podrían cambiar, haciendo que el análisis empírico no respetara el *ceteris paribus*.

## Aplicabilidad general, versatilidad

Otro aspecto derivado del simple modelo descrito —que podría parecer obvio, pero que es crucial tener presente en nuestro trabajo en el proyecto— es que ese mismo modelo podríamos utilizarlo virtualmente para cualquier producto comerciable, y no sólo para bicicletas en la ciudad de Bogotá en un mes determinado. El modelo es de aplicación general, y podríamos usarlo también para analizar el mercado de banano en Caracas, o el de cortes de cabello en Montevideo. Las cantidades numéricas usadas, las unidades de medida, la moneda utilizada, etc., serían diferentes, pero en todos esos casos lo más probable será que las curvas de demanda sean descendentes, las de oferta ascendentes, y los puntos de equilibrio determinados por sus cortes; es decir, el modelo será el mismo. Esta versatilidad es una cualidad característica y muy útil de los modelos y, por lo menos, en parte responsable de la atracción que ejercen los mismos sobre los economistas; los modelos son vistos por los economistas como una forma compacta de expresar un concepto y entender (y poder explicar) su esencia. En efecto, oferta y demanda hay para todo en economía —para productos, como vimos, pero también para horas de trabajo y descanso, para saldos de

dinero en el banco, para seguridad en las calles, para educación, para aire fresco, etc.— y el poder aproximarse a una buena comprensión de estos “mercados” mediante algo tan claro y “visual” como un modelo, es considerado de gran valor en la profesión, y seguramente no solo en ella.

## Tipos de modelos

En economía, como en otros campos en los que se hace uso de modelos, estos se pueden clasificar de acuerdo con distintos criterios. Estas clasificaciones pueden tener un grado variable de importancia o sentido, dependiendo, entre otras cosas, del objetivo del estudio que se quiera desarrollar. Así, podrá haber modelos económicos estocásticos o no-estocásticos dependiendo de si las variables utilizadas son deterministas o aleatorias (por ejemplo, si son generadas en un ambiente experimental controlado o, por el contrario, extraídas de una muestra empírica sobre la que se tiene poco o ningún control); modelos empíricos y teóricos; o modelos clasificados de acuerdo con el foco puesto en temas técnicos específicos de la disciplina, como podrían ser modelos micro o macroeconómicos y, dentro de estos últimos, de economía abierta o cerrada (ver introducción de este capítulo); o modelos de “dos generaciones” (o de “generaciones parcialmente superpuestas”), donde el horizonte de existencia y planificación de los individuos o entidades se asume confinado a dos períodos (evidentemente otra gran simplificación, pero de notoria contribución al entendimiento de fenómenos complejos; véase Galor, 1992, y la referencia de Wikipedia citada al final de este artículo); o modelos de equilibrio general, parcial o de no-equilibrio; o modelos (de expectativas) racionales o de racionalidad acotada o limitada (*bounded rationality*); o modelos de competencia imperfecta; o de información parcial; modelos contables (que son ciertos por convención, ya que están basados únicamente en identidades de contabilidad nacional que son ciertas por definición), etc., etc.

## Antecedentes económicos de la clasificación adoptada

Para una ciencia construida en torno a modelos, no es de extrañar que se puedan hacer tantas clasificaciones relativamente importantes. Específicamente para los propósitos de nuestro proyecto de investigación podemos encontrar una categorización más apropiada en Evans (1997), quien propone cuatro tipos de modelos económicos fundamentales: visual, matemático, empírico y de simulación. Esta clasificación endosa en forma sustancial el enfoque de nuestro proyecto, que busca integrar elementos verbales, diagramáticos, algebraicos y computaciones en el modelamiento.

$$(1) S = a + bP$$

$$(2) D = c - dP + eIE$$

$$(3) S = D = Q^d$$

$$(4) P^d = \frac{(C + eIE - a)}{(b + d)}$$

$$(5) Q^d = a + bP^d$$

**Figura 4.** Sistema de ecuaciones 1, correspondiente a la figura 3.

manifestación adicional de las diferencias entre economía e ingeniería en el contexto que nos ocupa.

Los modelos visuales corresponden a los que hemos visto, por ejemplo, en las figuras presentadas más arriba. El modelo queda decentemente explicado mediante dibujos o gráficos, sin demasiada exactitud, requiriendo por lo general de la explicación verbal o escrita para más detalles (que pueden ser importantes). En los términos de nuestro proyecto, lo diagramático y lo verbal se complementan. Los modelos visuales son muy usados en economía, muchas veces de manera informal para reforzar presentaciones y explicaciones.

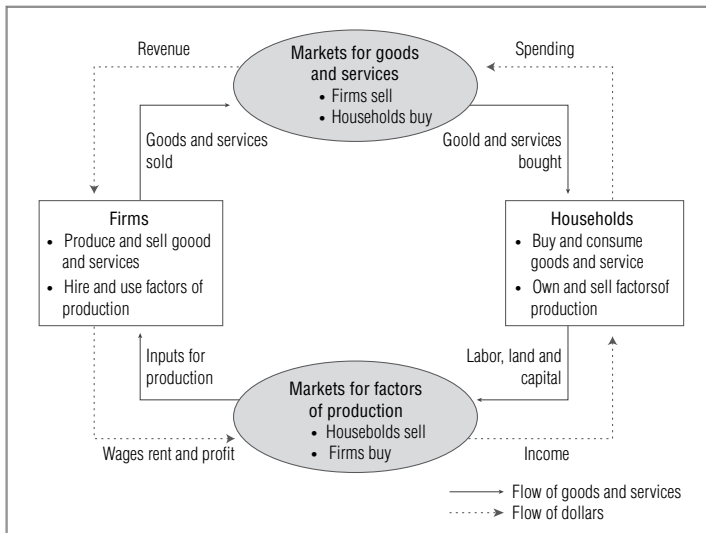
Los modelos matemáticos son aquellos expresados como sistemas de ecuaciones, con o sin componentes dinámicos. Son mucho más precisos y formales que los visuales, aunque no por ello se los usa en forma exclusiva, debido a la conveniencia de agregar elementos visuales a cualquier explicación. En la figura 4 (Sistema de ecuaciones 1, tomado de Evans [1997]), las ecuaciones (1) a (3) pueden verse como un modelo matemático que básicamente corresponde al modelo visual presentado en la figura 3 (siendo las igualdades (4) y (5) la solución del modelo).

Los modelos empíricos son esencialmente matemáticos, pero con valores asignados a los parámetros del caso, generalmente mediante un proceso de estimación econométrico (como lo hemos explicado). Evidentemente, hay lugar a modelos empíricos cuando, para su estimación, se dispone de datos para todas las variables del modelo. Una vez estimados, los modelos empíricos se podrán usar para responder cuantitativamente a preguntas que el modelo matemático (o el visual) sólo podían responder cualitativamente o en forma condicional (“si el parámetro  $m$  es mayor que  $n$ , entonces el precio bajará...”). Como expusimos, y a diferencia de los modelos visuales o matemáticos, los modelos empíricos, típicos de la economía (aunque no tengan su representante inmediato en el cuarteto de lo verbal, diagramático, matemático y computacional), no son muy comunes en ingeniería, pero en principio no deben descartarse para determinadas aplicaciones.

Los modelos de simulación, que forman una gran gama, son generalmente de naturaleza matemática y en ellos se utilizan computadores para generar escenarios de diversa índole en ambientes controlados. Modelos de simulación pueden ser usados también cuando no se conozcan los parámetros “verdaderos”, o cuando se quieran probar diferentes escenarios estocásticos cuya manejabilidad analítica pueda estar fuera de las posibilidades del investigador. Estos modelos hacen pleno uso de la base computacional de la modelación y llevan implícito un gran potencial de creatividad, no sólo en cuanto a qué modelar sino cómo hacerlo.

## Modelos como fuente y resultado de inspiración

Otros autores proponen formas adicionales de clasificar modelos, incluyendo tipos que no se adaptan fácilmente a ninguna de las categorías mencionadas. Por ejemplo Kaewsuwan (2002) refiere a los diagramas de flujo (*flow chart*) como una forma legítima de (representar) modelos. Si bien esta representación es “gráfica” en esencia, puede incluir elementos que no son comunes en esta, como puede verse en el siguiente ejemplo (figura 5) de “diagrama de flujo circular” como modelo visual de una economía.

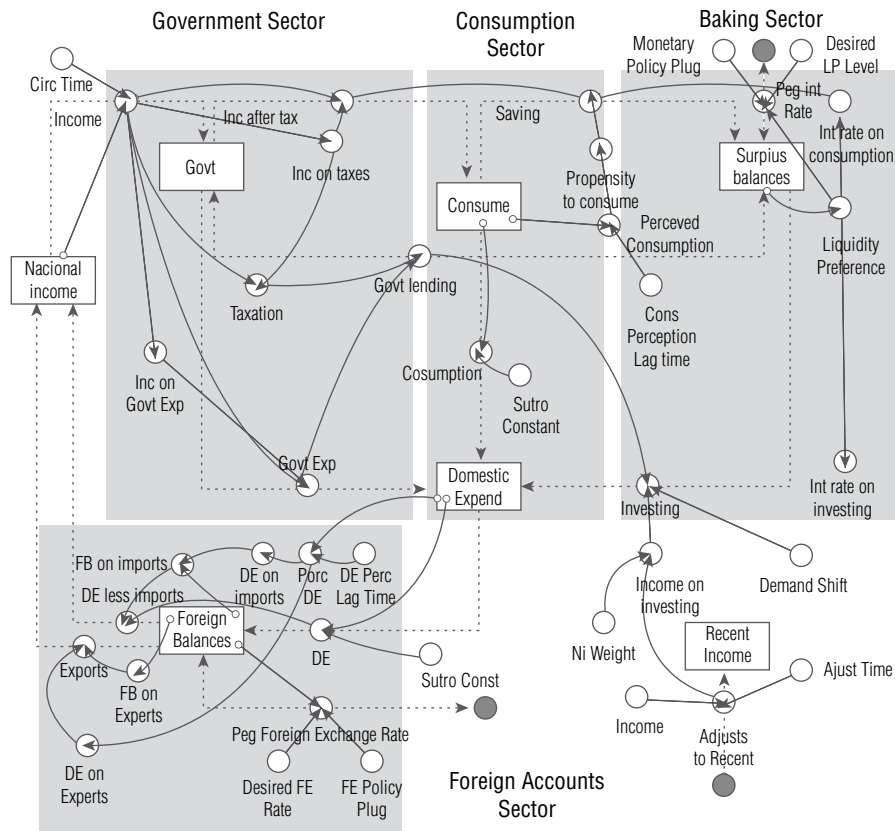


**Figura 5.** Diagrama de flujo circular.

Fuente: Kaewsuwan (2002)

El ingenio humano no se detuvo ahí, produciendo otros tipos de modelo que distan aún más de las cuatro representaciones formales que nos ocupan en el proyecto. Hay modelos gráficos que se basan en una analogía de la economía con la física –en particular la hidráulica– con tubos de distinto calibre donde “fluyen” bienes, servicios, dinero; grifos que se pueden abrir y cerrar a volun-

tad (“política económica”), tanques de almacenado (“ahorro”), cisternas automáticas de control de niveles de “líquido”, válvulas de escape. En la figura 6, se muestra un paso intermedio en este camino de modelos gráficos “creativos”.



**Figura 6.** La máquina de Phillips como stocks y flujos.  
Fuente: Ryder, 2009

## Uso, valor y limitaciones de los modelos

Dado que lo que antecede aclara también aspectos relativos a esta sección, haremos el análisis de manera sucinta, a modo de listado. Los puntos mencionados surgen de la experiencia de modelamiento en economía, teniendo muchos de ellos aplicación tanto macroeconómica (a nivel global, de país o región) como microeconómica (a nivel de industrias o empresas determinadas, hogares y consumidores particulares).

En lo que respecta a los propósitos del proyecto, algunos de los aspectos que siguen tienen implicaciones directas en cuanto al valor del uso de modelos

para el aprendizaje de las matemáticas, especialmente dentro del campo de la ingeniería. En este sentido, la construcción (y luego, el uso) de modelos puede verse como una instancia muy favorable para la comprensión y el aprendizaje: el modelo permite ver los conceptos involucrados en acción, jugar con ellos (por ejemplo, cambiar valores de parámetros o variables y hacerse una idea del efecto ocasionado) y entender sus interrelaciones, clarificando muchas veces lo que conceptos más tradicionalmente ligados a las matemáticas –campos numéricos, ecuaciones, funciones, algoritmos, etc.– encierran en forma más abstracta y no inmediatamente comprensible. Del mismo modo, la solución de un problema matemático enfocada en un principio desde la perspectiva de la construcción de un modelo suele mostrar, en el proceso, facetas que no siempre quedan en evidencia en procesos de solución más directos, y menos aún en forma consciente por parte de los estudiantes. En efecto, preceder o acompañar la solución “tradicional” de un problema con un tanteo de soluciones o estrategias (por ejemplo, mediante una representación gráfica de todo o parte del problema, o con un simple algoritmo o programa de simulación que muestren soluciones numéricas aproximadas) puede iluminar el camino a la solución buscada, dando pautas que generan inspiración.

## Uso y valor de los modelos

En síntesis, en economía los modelos tienen valor reconocido para:

- Entender mejor un problema, identificando sus elementos componentes y adoptando una posición en cuanto a la importancia relativa de los factores actuantes.
- Predecir, hacer proyecciones, analizar escenarios alternativos.
- Interpretar fenómenos.
- Explicar (a uno mismo y a otros) el resultado de alguna acción, pasada o futura; argumentar; justificar.
- Servir como herramienta auxiliar para la toma de decisiones y la proposición de medidas o políticas económicas.
- Analizar la sensibilidad de resultados a cambios en variables, en parámetros o en la estructura del modelo, enfocando tanto cambios de nivel como de ritmo de cambio (derivadas, elasticidades, etc.).
- Planear y distribuir recursos (también en economías centralizadas).
- Predecir o analizar el desempeño de una empresa: predicción y seguimiento de precios de valores en mercados, etc.
- Manejar riesgos.

## Limitaciones o riesgos en el uso de modelos

De acuerdo con lo expuesto sobre los modelos en economía, las limitaciones y riesgos quedan bastante en evidencia. Una exposición clara y resumida de estos aspectos –tomados de la ciencia económica pero de aplicación inmediata a otras disciplinas– se puede ver en la cita, muy pertinente, que traducimos de Kenneth Boulding (1966):

[...] Los modelos económicos, especialmente cuando se busca la interpretación de un fenómeno tan complejo como la fluctuación dinámica o el crecimiento de la economía en su conjunto, son ayudas al pensamiento y no sus sustitutos. Debemos cuidarnos de apoyarnos demasiado en un modelo demasiado simple, ya que los supuestos asumidos en esos modelos suelen no cumplirse en la realidad. De cualquier forma, sin la ayuda de esos modelos, la complejidad del caso nos llevaría a una total confusión o a retroceder, confinándonos al empiricismo ciego y al registro de datos cuyo sentido siempre se nos escapa.

En resumen, pese a sus limitaciones, los modelos son imprescindibles.

## Conclusiones, énfasis y prioridades

De manera esquemática, se proponen las siguientes conclusiones, énfasis o prioridades:

- Por lo general, los comentarios que siguen hallarán su forma ideal de manifestación cuando el trabajo se realice en equipo (pequeños grupos), como fue el escenario habitual en este proyecto.
- Es importante tener claridad sobre preguntas tales como “qué se quiere modelar”, “por qué es necesario (o conveniente usar) un modelo en un caso determinado” o “por qué esto que se propone es un modelo”..
- Los problemas se plantearán procurando fomentar la creatividad en el modelamiento, un esfuerzo que muy probablemente será acompañado por un intento de comprender mejor el problema y los conceptos matemáticos que lo forman. Dejar “abierto” parte de la pregunta o no proporcionar de antemano todos los datos del problema suele motivar la creación de un modelo como actividad natural, no forzada, dando cierta libertad (con límites) para el diseño del modelo. La solución, en estos casos, tendrá a menudo una forma que evidencia un grado de profundización en el problema que no es característico cuando se prescinde de los modelos. Por ejemplo, el estudiante (o grupo de estudiantes) que creó el modelo y erigió con base en él la solución podrá decir: “hemos notado



que si no definimos una condición inicial (a la cual el enunciado del problema no se refiere), la solución podrá ser convergente o divergente. Descubrimos esto en un tanteo inicial de parámetros que mostró que para valores del parámetro  $p$  mayores que 2 queda asegurada la convergencia. El posterior estudio analítico dejó en claro que, más precisamente, el umbral para convergencia es 2,08". Es bueno también ver el modelo como una solución no-única a ciertos problemas; tratándose de una simplificación de la realidad, necesariamente un modelo no podrá pretender dar la única solución a una pregunta relacionada con la realidad.

- Representaciones verbal, diagramática, matemática y computacional, ¿alternativas o complementos?, ¿uso serial o paralelo? El proyecto pone especial atención en atender en forma relativamente independiente el manejo de las cuatro vías por parte de los estudiantes. Para que la separación no resulte artificial o forzada, hay que planear con cuidado la actividad, dando lugar tanto a "lo que hay que hacer y saber" (p. ej., el conocimiento y uso de los diagramas de flujo por parte de todo estudiante de ingeniería) como algo espontáneo y creativo. Este es un corolario importante de la experiencia en economía.
- El modelo como instrumento de comunicación y explicación en el grupo y hacia afuera. La tarea de la construcción conjunta de un modelo es rica en oportunidades de aprendizaje, sobre todo cuando, como en nuestro proyecto, viene con soporte permanente por el lado de la discusión y la argumentación. La necesidad de explicar a otros suele ser no menos importante, también por el hecho de ser posterior (generalmente) a la explicación a uno mismo; es decir, al propio entendimiento del problema.
- Conciencia de las limitaciones del modelo elegido, que tiene que quedar de manifiesto en la forma en que se lo usa. Usar el modelo adecuadamente y entender sus limitaciones es a la vez una señal de entendimiento del problema de base (aquello que se quiso modelar), de que probablemente se sabrá resolver, y de que los estudiantes son conscientes de las diferencias, a veces sutiles, entre el modelo, la realidad a la que apunta y la solución propiamente dicha del problema.

## Referencias

- Allen, R. G. D. (1976). *Mathematical Economics* (especially Ch.1 [The Cobweb and Other Simple Dynamic Models]). 2<sup>da</sup> ed. London: The MacMillan Press Ltda.
- Barro, R. J. (1976). Rational Expectations and the Role of Monetary Policy. *Journal of Monetary Economics*, 2.

- Barro, R. y Grossman, H. (1976). *Money, Employment and Inflation* (especialmente Ch. 1 [The basic model] and Ch. 5 [Inflation and unemployment]). Cambridge: Cambridge University Press.
- Begg, D., Fischer, S. y Dornbusch, R. (2000). *Economics*, 6<sup>ta</sup> ed. McGraw-Hill.
- Boulding, K. E. (1966). *Economic Analysis*. 4<sup>ta</sup> ed. Vol. 2: Macroeconomics (Ch. 3 [Macroeconomic Models – Models of Production and Consumption], Ch. 4 [Macroeconomic Models: Models of Monetary Circulation and Exchange], Ch. 8 [Dynamic Models] and Ch. 11 [Positive and Normative Economics]). New York: Harper and Row. Tokyo: Evanston & London, and John Weatherhill, Inc.
- Dornbusch, R. (1976). Expectations and Exchange Rate Dynamics. *Journal of Political Economy*, 84.
- Dornbusch, R. (1980). *Open Economy Macro-Economics*. USA: Basic Books, Inc.
- Evans, G. R. (1997) *Economic Models*. Disponible en <http://www2.hmc.edu/~evans/chap1.pdf>.
- Galor, O. (1992). A Two-Sector Overlapping-Generations Model: A Global Characterization of the Dynamical System. *Econometrica*, 60(6): 1351-1386. DOI:10.2307/2951525.
- Holcombe, R. (1989). *Economic Models and Methodology*. New York: Greenwood Press, ISBN 0-313-26679-4 .
- Kaewsuwan, S. (2002). *Importance of Models in Economics*. Disponible en [http://www.gaoshan.de/university/tp/Importance\\_of\\_Models\\_in\\_Economics.pdf](http://www.gaoshan.de/university/tp/Importance_of_Models_in_Economics.pdf)
- Lucas, R. E. (1972, abril). Expectations and the Neutrality of Money. *Journal of Economic Theory*, 4.
- Lucas, R. E. (1973). Some International Evidence on Output-Inflation Tradeoffs, *American Economic Review*, 63: 326-334.
- Lucas, R. E. (1976). Econometric Policy Evaluation: A Critique; in The Phillips Curve and Labor Markets, Brunner, K. y Meltzer, A. (eds.). Carnegie-Rochester Conference Series on Public Policy, 1: 19-46.

- Mishkin, F. S. (1995). The Rational Expectations Revolution: A review Article En Preston J. Miller (ed.) *The Rational Expectations Revolution, Readings from the Front Line*. Working Paper No. 5043, febrero, NBER, Cambridge, MA.
- Mussa, M. (1975, octubre). Adaptive and Regressive Expectations in a Rational Model of the Inflationary Process. *Journal of Monetary Economics*.
- Muth, J. F. (1960, junio). Optimal Properties of Exponentially Weighted Forecasts. *Journal of the American Statistical Association*, 55(290): 299-306.
- Muth, J. F. (1961, julio). Rational Expectations and the Theory of Price Movements. *Econometrica*, 29: pp. 315-335.
- Ryder, W. H. (2009?) A System Dynamics View of the Phillips Machine. Disponible en <http://systemdynamics.org/conferences/2009/proceed/papers/P1038.pdf>
- Samuelson, P. A. (1983). *Foundations of Economic Analysis* (edición ampliada). Cambridge: Harvard University Press,
- Samuelson, P. A. y Nordhaus, W. D. (1998). *Economics*. 16<sup>ta</sup> ed. Irwin/McGraw-Hill.
- Sargent, T. J. (1973). Rational Expectations, the Real Rate of Interest and the Natural Rate of Unemployment. *Brookings Papers on Economic Activity*, 2.
- Sargent, T. J. y Wallace, N. (1973, junio). Rational Expectations and the Dynamics of Hyperinflation. *International Economic Review*.
- Sargent, T. J. y Wallace, N. (1976, abril), Rational expectations and the Theory of Economic Policy. *Journal of Monetary Economics*, 2.
- Walsh, V. (1987). "Models and theory", the New Palgrave: A Dictionary of Economics, 3: 482-483. New York: Stockton Press.
- Walters, A. A. (1971, junio). Consistent Expectations, Distributed Lags and the Quantity Theory. *The Economic Journal*, 81(322): 273-281.

Internet:

Two-generation models / overlapping generations models – Referencias en Wikipedia ([http://en.wikipedia.org/wiki/Overlapping\\_generations\\_model](http://en.wikipedia.org/wiki/Overlapping_generations_model)). Usos típicos: modelos de ahorro y consumo, de deuda nacional y finanzas públicas, de seguridad social, de inversión y crecimiento, etc.

[http://en.wikipedia.org/wiki/Economic\\_model](http://en.wikipedia.org/wiki/Economic_model) [varias secciones son interesantes para nuestros propósitos].

## Capítulo 4



# La espiral en la formación de la competencia de modelado

Luis Facundo Maldonado Granados\*  
Albert Montenegro Vargas\*\*

### Introducción

Si nos atenemos a las expresiones de las políticas educativas contemporáneas, la formación de competencias es uno de los temas más frecuentemente referidos y en el cual convergen muchas de las propuestas de investigación e innovación educativa. Curiosamente aún no abundan los estudios que expliquen la naturaleza de las competencias, su formación y evolución.

Nuestro trabajo tiene un interés por el aprendizaje de las competencias desde la perspectiva de la representación de conocimiento y de la dinámica de las redes sociales. La estructura del ser vivo, que le permite adaptarse de manera dinámica a los cambios del entorno (sin lo cual no sobreviviría), incorpora como componente esencial los mecanismos de percepción. Desde la neurociencia, esto se interpreta como una estructura dinámica del sistema de neuronas que es resultado de la entrada de información del entorno a través de los mecanismos aferentes y que permite funcionalmente reconocer entidades y procesos; actúa estructuralmente con base en patrones de reconocimiento y dinámicamente como dispositivo que permite identificar el cambio, prever lo que va a suceder y activar el sistema eferente para actuar anticipadamente (Llinas, 2002; O'Reilly y Manakata, 2000; Nelson, Haan y Thomas, 2006; Patten, y Campbell, 2011).

\* Ph. D. y docente investigador del Departamento de Matemáticas de la Universidad Central. Grupo de investigación Tecnice. Correo electrónico: lmaldonadog1@ucentral.edu.co

\*\* Ph. D. y docente investigador del Departamento de Matemáticas de la Universidad Central. Grupo de investigación Tecnice. Correo electrónico: lmaldonadog1@ucentral.edu.co



**Figura 1.** Dinámica de la percepción. La entidad en el entorno genera información que estimula el sistema aferente del cognoscente, la cual desencadena la transmisión de energía electroquímica en la red de neuronas y activa un patrón de reconocimiento.

miento y de la acción adaptativa del ser vivo. Podemos pensar en la experiencia como una sucesión dinámica de eventos que tienen suficiente parecido como para poder generar el patrón de reconocimiento, pero también con particularidades, pues suceden en tiempos diferentes y transmiten variaciones del sistema que origina la información (figura 1). La naturaleza, entonces, ha creado un mecanismo natural para generar clases en forma de patrones de reconocimiento. La inteligencia artificial, desde sus inicios, se ha interesado en este tema; un ejemplo de ello son los desarrollos sobre patrones de reconocimiento, redes neuronales y sistemas ontológicos (O'Reilly y Manakata, 2000; Sowa, 2000).

Hay pruebas suficientes de que los animales domésticos desarrollan patrones de reconocimiento que les permiten una comunicación específica con sus amos. El hecho de que distingan a su amo y respondan a un nombre es una prueba. En este proceso podemos ubicar el origen del uso de palabras y el desarrollo del lenguaje.

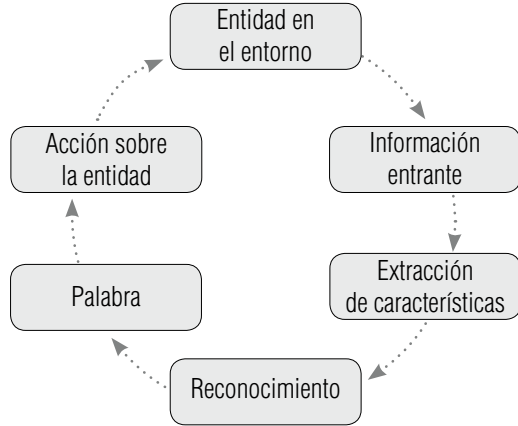
En algún momento de la evolución se desarrolló una habilidad muy especial: producir configuraciones de sonidos en correspondencia con los patrones formados. Entre el reconocimiento de patrones y la acción se introdujo la generación de un patrón de sonidos: la palabra.

Esta habilidad del ser humano es el soporte de su estilo específico de comunicación: el lenguaje. La palabra pronunciada es estímulo que afecta a otros seres humanos, los cuales reconocen la palabra y el patrón de reconocimiento al cual corresponde. Es el origen de la comunicación basada en lenguaje, pero también es el origen del pensamiento basado en palabras (figura 2). El reco-

Desde esta perspectiva, la formación de cualquier competencia cognitiva está relacionada con la formación de patrones de reconocimiento de las entidades situadas en el entorno del ser humano, y el aprendizaje está en función de las experiencias, entendidas estas como relaciones dinámicas de entradas de información-reconocimiento-acción y procesamiento de información de retorno (Maldonado, 2012). En la percepción y en la experiencia que la genera se encuentra la base del conoci-

nocimiento deja huellas en la memoria: puede ser recordado. En el caso del ser humano, recordamos el reconocimiento hecho en el pasado y la palabra vinculada al acto del conocimiento y podemos contar a otro este evento psicológico generando las mismas palabras. Más aún, podemos relatarnos a nosotros mismos lo sucedido en el pasado, es decir, que la palabra expresada es estímulo que activa de nuevo el mismo patrón de reconocimiento. Si la palabra se graba

como palabra escrita o en un mecanismo reproductor de sonido, se convierte en fuente de experiencia nueva para la misma persona y también para otras. Entonces, el modelo conceptual es fuente de experiencias tanto para el sujeto que lo genera como para otros.



**Figura 2.** La generación de palabras –y luego sistemas de palabras– asociadas al reconocimiento de patrones es el origen genético de modelos conceptuales, que juegan un papel trascendental en la evolución humana.

Cuando usamos una palabra para denotar algo en el entorno, asociamos nuestros patrones de reconocimiento con configuraciones de sonidos o de símbolos gráficos. En la generación del lenguaje, los estímulos visuales y auditivos son la fuente principal en la generación de palabras. La lógica de la naturaleza humana se manifiesta con una tendencia a identificar lo que se parece en patrones que son generadores de palabras como sistemas de símbolos (Quine, 1960). En la interpretación vigotskiana, esa generación de palabras es activada en la solución de problemas. Los seres humanos no solo resolvemos problemas, sino que podemos expresar la solución del problema en palabras: el modelo mental encubierto por su naturaleza genera un modelo conceptual estimulante para otros y para sí mismo. El lenguaje permite pensar sobre lo que hacemos y lo que hicimos, y genera una ventaja frente a otras especies (Vigotsky, 1978). Las palabras son la base del lenguaje y este de la comunicación entre miembros de la misma especie –pares en la actividad cognitiva–, y cumple las funciones de construir registros de memorias de experiencias y de mecanismos de generación de experiencias similares en quienes entran en comunicación. El proceso es tan dinámico que el mismo pensamiento se ve afectado y el ser humano desarrolla la capacidad de pensar con palabras en una forma tal que pensar el mundo es un proceso de asignarle palabras y construir relaciones entre palabras. Cuando Sowa (1986, p. 2000) presenta las estructuras de grafos concep-

tuales, hace un análisis de esa dinámica. Desde la base no verbal, los patrones de reconocimiento en el cerebro son puntos de referencia para comparar los arreglos o estructuras de estímulos que se forman como resultado de la estimulación de nuestro sistema aferente. Entonces, lo que percibimos son estructuras que se ajustan o no a los patrones de reconocimiento (Gärdenfors, 2000). Esto significa que cada nuevo elemento que se identifica en el entorno se percibe como elemento de una clase. Vistas las cosas así, la base sensorial es determinante de nuestra construcción cognitiva. Los estudios ya antiguos de estimulación temprana muestran que hay una influencia positiva entre la variedad de estimulación inicial en la época de la infancia y el desarrollo del cerebro, tanto en otras especies como en el mismo ser humano.

Se presenta entonces un juego de relaciones entre las entidades o sistemas perceptibles –con base sensorial– en el entorno, los patrones de reconocimiento y las palabras.



**Figura 3.** El triángulo de la significación. Las entidades en el entorno pueden estimular la generación de una imagen mental –en el cerebro– de la cual se deriva una estructura en forma de palabra u otro significante equivalente (Odgen y Richards, 1923).

El triángulo de la significación (Odgen y Richards, 1923) es un desarrollo que ilustra esta dinámica de una manera un tanto externa: una entidad es referente de una idea –modelo mental–, la cual se relaciona con un significante –sistema de símbolos o modelo conceptual– (figura 3).

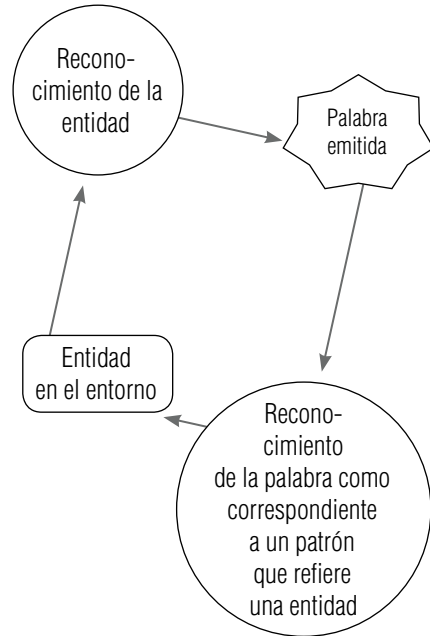
La palabra tiene propiedades estimulantes del sistema sensorial, de manera similar al referente. Esto hace que la palabra en sí sea estímulo que puede ser percibido y reconocido por otro agente perceptor (figura 4). En consecuencia, la comunicación humana basada en palabras –sistemas de símbolos– se da cuando una palabra emitida por un cognoscente es percibida y reconocida por otro mediante sus patrones de reconocimiento como palabra que corresponde a uno de sus patrones. Si eso sucede, la palabra emitida tiene significado para los dos actores de conocimiento en acción. Y tanto los patrones como las palabras actúan como clases que tienen casos: las entidades en el entorno son reconocidas como casos de esas clases. Esto tiene una consecuencia fundamental: reconocemos entidades en la medida en que tenemos patrones de reconocimiento y palabras. Cuando nos encontramos con una



entidad tendemos a pensar “esta es una <palabra>”. El estudio de la representación del mundo con categorías es del interés de la filosofía moderna y también de la inteligencia artificial y ha tomado el nombre de ontología (Sowa, 2000; Quine, 1960).

Algo bien interesante en los procesos perceptivos es que el mismo proceso de percibir, de conocer y de actuar genera información que estimula los procesos de percepción y se forman patrones de reconocimiento de nuestra propia actividad. Este es el substrato de la conciencia del actuar. La ciencia cognitiva lo identifica como metacognición o conocimiento de los procesos de conocimiento. Podemos reconocer lo que hacemos, cuándo lo hacemos, cómo lo hacemos, y también el lugar de nuestras acciones. Los estímulos que generan dolor, placer, etc., son también generadores de patrones de reconocimiento y de palabras.

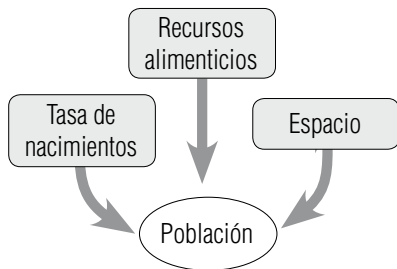
Está fuera de los límites de este documento el desarrollo más profundo de este tema. Nuestro interés, en este caso, es analizar una experiencia de formación de competencias de modelamiento desde la perspectiva cognitiva. La formación de esta competencia, en el contexto que hemos planteado, se entiende como la capacidad de generar modelos conceptuales capaces de habilitar la comunicación con otros y de nuevas experiencias para el mismo sujeto que las origina. Estos modelos conceptuales en este documento toman la forma de representaciones verbales, algebraicas y computacionales, las cuales consideramos como resultado de la evolución de la comunidad humana y, en particular, de la comunidad científica.



**Figura 4.** Representación del proceso de comunicación desde la perspectiva de los patrones de reconocimiento. Una entidad genera estímulos para el primer cognoscente; este reconoce la entidad mediante un patrón de reconocimiento y genera una palabra.

## La competencia de modelamiento

La competencia de modelamiento, en principio, se puede definir como la habilidad para desarrollar esta especie de juego. Esto implica un conjunto de habilidades específicas. La primera de ellas es seleccionar referentes y perspectivas de observación. Una perspectiva se entiende como la selección de un con-



**Figura 5.** Un ejemplo de perspectiva. La población en función de la tasa de nacimientos, la cantidad de recursos alimenticios y el espacio para el hábitat.

junto de características o variables y de un conjunto de relaciones entre ellas. Son ejemplos: un sistema de transporte como referente, las clases de vehículos, la velocidad promedio, el consumo de energía, la contaminación y sus relaciones entre estas variables; el crecimiento de una población se puede ver desde la perspectiva de la tasa de crecimiento relacionada con la disposición de nutrientes y de espacio físico disponible (figura 5).

La acción de representar el modelo mental en un modelo conceptual como expresión física de aquel, observable por otros, es un proceso que conduce a convertir lo subjetivo en objeto observable y manipulable tanto por su autor como por otras personas. Esto significa que el modelo conceptual en sí puede activar nuevos procesos cognitivos, y su relación con el referente puede ser una perspectiva de observación, generadora de procesos cognoscitivos en la espiral del juego de modelamiento. Además, el modelo conceptual puede modificarse como resultado de este juego. En el escenario de la historia, las modificaciones sucesivas de los modelos conceptuales son el sustrato de la evolución del conocimiento, particularmente del conocimiento científico interesado de manera consistente en el desarrollo del juego de modelamiento.

En este contexto, tienen sentido las expresiones de que el modelo conceptual es un medio para comprender y también un medio para comunicar, y que es una construcción social y que evoluciona en la medida en que es usado en la comunicación.

En la historia de la humanidad, el hombre ha desarrollado una capacidad mayor para representar y controlar sistemas complejos. En particular, las diferentes formas de ingeniería, entendida esta como ciencia de síntesis, orientada a generar soluciones a problemas de la sociedad, por integración de conocimientos de diferente origen y a probar estas soluciones, toman los modelos conceptuales como dispositivos para lidiar la complejidad de los sistemas como referentes de conocimiento. La complejidad está relacionada con la cantidad de información necesaria para describir un sistema (Turchin, 1977). La tesis que nos orienta sostiene que el modelamiento integra sistemas formales que pueden ser verbales, diagramáticos, algebraicos o computacionales.

El objetivo de este trabajo es profundizar en el sentido de la competencia de modelamiento y en la comprensión de sus componentes esenciales de la formación: razonamiento y representación verbal estructurada, razonamiento y representación diagramática, razonamiento y representación algebraicas y razonamiento y representación computacionales.

## Visión cognitiva del modelamiento

Desde la perspectiva cognitiva, el modelamiento es un juego dinámico que involucra básicamente tres elementos: un referente, un modelo mental y un modelo conceptual (Jonassen, 2006). El modelo mental se relaciona con la percepción o representación surgida en la mente del perceptor. El modelo conceptual corresponde con la generación de sistemas de símbolos como expresiones verbales, representaciones matemáticas, gráficas o programas de computador, etc. El modelo conceptual expresa el modelo mental.

La competencia de modelado como dimensión cognitiva se traduce en la habilidad para desarrollar este juego que *grosso modo* involucra las siguientes acciones:

- Seleccionar un referente.
- Tener algún tipo de experiencia con el referente.
- Formar una imagen o modelo mental del referente.
- Generar una representación externa –modelo conceptual– del modelo mental.
- Usar el modelo mental para hacer predicciones.
- Probar a otros que el modelo conceptual corresponde con el referente con base en las predicciones.
- Generar nuevas experiencias con el referente que pueden hacer evolucionar el modelo mental.

Así, el proceso continúa en espiral sin un estado final definido. Este hecho concuerda con la constatación, desde la perspectiva de la investigación científica, de que cada respuesta que se da a un problema genera nuevas preguntas con la consecuencia de que el conocimiento no tiene fin definido.

## Formas de representación y desarrollo de la competencia de modelamiento

Dado que lenguaje y pensamiento, como lo expresamos previamente, están estructuralmente ligados en la actividad cognitiva y comunicacional, podemos hipotetizar que hay un estilo de razonamiento relacionado con cada forma de representación y que, en consecuencia, hay diferencias en la experiencia cognitiva. Un mismo referente, visto desde una misma perspectiva, a través de cuatro formas de razonamiento, muy probablemente haga posible una construcción de memoria con mayor riqueza de relaciones y de significados, y también con mayor duración. Posiblemente, los niveles de abstracción asociados a los for-

matos tengan ventajas frente a las variables del contexto, el nivel de abstracción y la transferencia de la competencia a problemas similares y diferentes.

Para ilustrar esto, recurriremos a un ejemplo, pero antes conviene precisar que entendemos por caso la presentación de un referente en un contexto y la formulación de una pregunta asociada con una perspectiva o mirada a relaciones en ese contexto. Responder a la pregunta obliga a construir una representación, y la capacidad de seleccionar variables, construir perspectivas y formular preguntas son componentes de la habilidad de modelamiento matemático. El siguiente es un ejemplo relativamente sencillo y que se puede presentar brevemente.

### Primer ejemplo: el juego de dados



**Figura 6.** Referente para un caso o problema en contexto

Jugar con un par de dados es una actividad bastante conocida. Se reúne un grupo de amigos y, en algún momento, deciden probar suerte tirando un par de dados. Todos están seguros de que son dados bien equilibrados, de tal manera que las apuestas pueden ser idealmente justas. La pregunta es ¿qué es mejor, apostar por el 11 o por el 4 cuando se lanzan los dos dados en la misma jugada?

### *El proceso argumentativo basado en ontologías y en la representación verbal*

El flujo de la expresión verbal en un proceso argumentativo espontáneo es la sucesión de participaciones que convergen en la búsqueda de una respuesta aceptada por los participantes, sin que esto signifique que el consenso se dé todas las veces. Los estudiosos de la argumentación han podido demostrar que existe una diferenciación funcional de las participaciones: la pregunta, la explicación, el dato, la hipótesis, etc., tienen su propio papel en la búsqueda de la respuesta. En la actividad pedagógica, la conciencia de la función de las participaciones o contribuciones argumentativas activa la conciencia sobre el proceso –metacognición–, mejora las posibilidades de regulación y potencia el aprendizaje. Esto tiene un doble efecto: mejora la calidad de las contribuciones y mejora el aprendizaje (Maldonado, De Groot y Drachman, 2012). Las categorías argumentativas constituyen su ontología. En la práctica pedagógica, y en las disciplinas específicas, estas categorías varían de acuerdo con la importancia y funcionalidad.

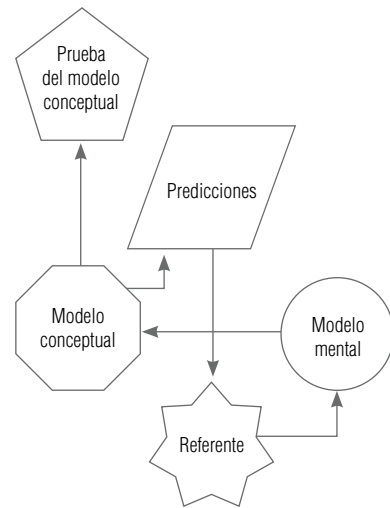
En el caso de los dos dados, el profesor decidió usar sólo cuatro categorías: pregunta, hipótesis, datos y comentarios.

También existe otra ontología involucrada con la solución del problema: la que corresponde a la representación del referente. Las siguientes son las categorías que usarían posiblemente los actores en el caso: dado, cara del dado, lanzamiento, espacio muestral, probabilidad, probabilidad simple, probabilidad condicional. El uso de estas categorías depende de la experiencia y conocimiento de los actores.

Si bien las categorías pueden seleccionarse o identificarse fácilmente, uno de los aspectos más problemáticos es hacer seguimiento de manera eficiente a la discusión grupal. Afortunadamente los expertos han desarrollado dispositivos en línea para hacerlo; entre ellos Argunaut<sup>1</sup> (que se ha usado en esta investigación) que usa cajas de diferente forma geométrica en las que se introduce textos; cada caja identifica una categoría argumentativa, y se dispone de tres clases de arcos para relacionarlas. Los

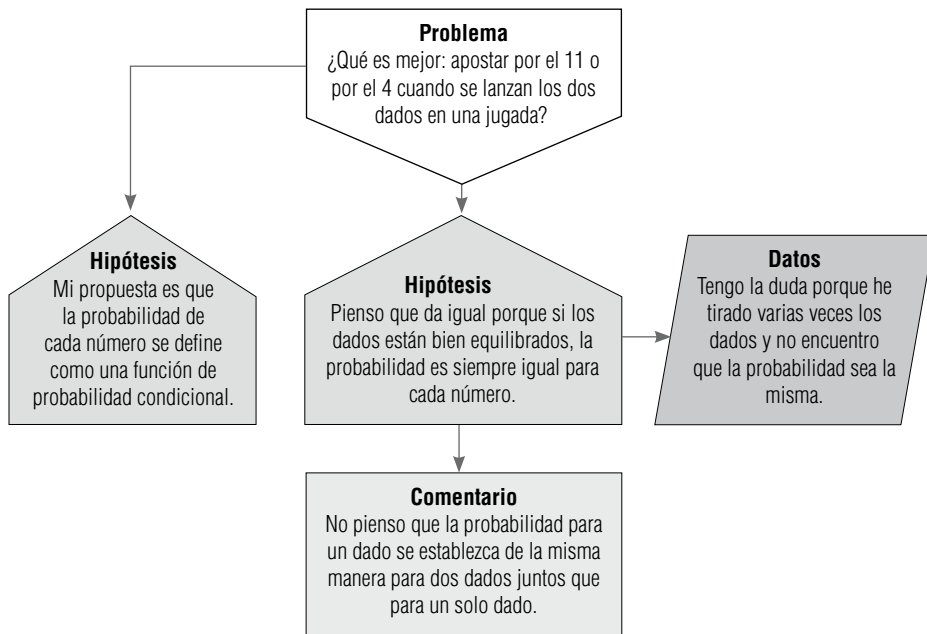
participantes introducen los mensajes y los relacionan con las contribuciones de los otros participantes como “apoyo”, “oposición” o simple “relación”. El software registra la secuencia, la fecha, la duración, etc., y permite hacer automáticamente varios análisis. En esta aproximación, el contenido de las cajas usa la ontología que representa el referente –dominio de conocimiento–, y la forma y las relaciones entre las cajas expresa la ontología argumentativa.

La figura 8 ejemplifica de manera muy simplificada el mapa argumentativo resultante de la participación de varios actores en la solución del caso de los dados. El ejercicio de representar verbalmente y de convencer a otros de la validez de la representación es, en nuestro enfoque, fundamental en el desarrollo de la competencia modelativa. Cada contribución es una representación del modelo mental activo de cada participante que, al expresarse como modelo conceptual en una expresión escrita, activa la valoración de otra persona que, a su vez, está representando el mismo sistema. El encadenamiento de esas intervenciones constituye un hilo argumentativo dinámico, en el que cada expresión puede ser un estado en la solución del problema.



**Figura 7.** El juego de modelado: seleccionar un referente, tener algún tipo de experiencia con el referente, formar una imagen o modelo mental del referente y generar una representación externa –modelo conceptual–, hacer predicciones, probar que el modelo conceptual corresponde con el referente, generar nuevas experiencias con el referente para hacer evolucionar los modelos mental y conceptual.

<sup>1</sup> Argunaut es un software desarrollado en el proyecto europeo Argunaut, IST-2005-027728. Colaboración del grupo Kishurim con otros grupos de la Red Europea de Argumentación.



**Figura 8.** Segmento de un proceso argumentativo. Los participantes utilizan categorías para hacer sus intervenciones. Hay un símbolo para el problema, otro para las hipótesis, otro para los datos y otro para los comentarios. La secuencia constituye el hilo argumentativo que evoluciona –para el caso– en dos direcciones: probabilidad simple y probabilidad condicional.

### ***El juego algebraico***

El segundo conjunto de experiencias de aprendizaje es el ejercicio de la demostración con base en ecuaciones. El razonamiento algebraico y su correspondiente representación en fórmulas implican el reconocimiento de un sistema de variables o categorías de entidades y relaciones. Por lo tanto, activa la abstracción.

En el caso que estamos abordando, cada dado puede ser representado como un sistema de seis lados; y el hecho de lanzarlos puede representarse como un sistema de eventos denominados por los números de cada una de las caras del dado.  $S$  es el sistema de los eventos  $[1, 2, 3, 4, 5, 6]$ .

Cada uno de los eventos tiene igual probabilidad de aparecer y es excluyente; si aparece cualquiera de ellos, los otros no aparecen. La siguiente es una percepción de la estructura:

$$\begin{matrix} p(1)p(12) \\ p(1)p(12) \end{matrix}$$

Si tomamos un dado y lo lanzamos, entonces la probabilidad de un evento  $x$  es igual a 1 entre 6.  $P(x)=1/6$

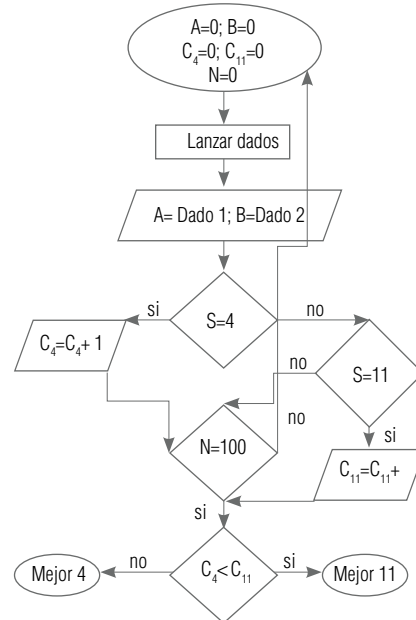
**Tabla 1.** Matriz de combinaciones de las caras de los dos dados. En cada celda se presenta la suma de los números de cada uno de los dados. La matriz define el espacio muestral sobre el cual se define la probabilidad de cada número resultado de la suma de los dos dados.

Caras	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

La representación de la función de probabilidad simple es una base de abstracción que sirve de apoyo a otros pasos posteriores. Cada dado tiene un comportamiento independiente del otro dado; entonces, una vez que ha caído un dado, se define un evento que se combina con cualquiera de los otros lados. De tal manera que una vez que un dado cae con una cara arriba, esta tiene la probabilidad de combinarse con cualquiera de los otros lados de  $1/6$ .

$$P(x) \cap (y) = 1/6 * 1/6 = 1/36$$

En este punto, entra en juego la relación entre dos probabilidades, y la una condiona a la otra. Entra, entonces, la representación de la probabilidad condicional. Si cada evento del primer dado que cae se combina con cada evento del segundo dado, la posibilidad de combinaciones está expresada por una matriz  $6*6$  (véase tabla 1). El número de combinaciones cuya suma es 4 es de 3 y el número de combinaciones cuya suma es 11 es de 2. En consecuencia, la probabilidad de que salga un 4 es  $p(4)=3*1/36=1/12$ ; la probabilidad de que salga un 11 es  $p(11)=2*1/36=1/18$ . Por tanto  $p(11)<p(4)$ . Al parecer, lo conveniente en el ordenamiento pedagógico es partir de la experiencia argumentativa para llegar a la algebraica, pues permite un proceso inductivo. El deductivo posiblemente sea más difícil para los estudiantes.



**Figura 9.** Un diagrama para la solución del problema.

### **La diagramación**

La tercera experiencia es la representación en diagrama de los pasos lógicos para resolver el problema, que podemos denominar algoritmo –si se tiene seguridad en el hallazgo de la solución– o heurística –si sólo se garantiza un acercamiento a la solución–. Al parecer, el desarrollo de esta forma de representación requiere de experiencia previa en la solución del problema o, al menos, de problemas similares.

Podemos tomar la definición muy aceptada de inteligencia artificial según la cual la solución de un problema es un proceso de transición de estados de un sistema generado a causa de la aplicación de un operador, desde un “estado inicial” hasta un “estado solución”, para orientar la experiencia.

Un primer paso se puede pensar como la identificación de un sistema en un estado inicial. Un sistema de dos dados se puede representar con dos variables  $A$  y  $B$ . Los valores de estas dos variables se puede pensar que son 0, antes de cualquier lanzamiento. Configuramos un espacio muestral, por ejemplo de 100 lanzamientos, y vamos contando las veces que lanzamos los dados; para esto, usamos también una variable  $N$  cuyo valor antes de iniciar es de 0. Identificamos los valores que nos interesa: en este caso todos los eventos  $A+B=4$  o  $A+B=11$ . Tomamos la variable  $C_4$  para anotar las veces que salga 4, y  $C_{11}$  para las veces que salga 11, partiendo de  $C_4=0$  y  $C_{11}=0$  como valores iniciales.

Cuando se hayan hecho los 100 lanzamientos, la solución del problema estará dada por la comparación  $C_4 < C_{11}$ . Si el valor es verdadero, es mejor apostar por el 11, de lo contrario es mejor apostar por el 4.

Se espera que la experiencia de la diagramación genere la imagen mental del proceso de solución de un problema. El referente, que no es directamente la solución del problema mismo, sino el mismo proceso seguido, desarrolla la capacidad de planear una solución, lo cual es un componente de la habilidad de modelamiento.

Al integrarse este tipo de experiencia con las experiencias argumentativa y algebraica, se consolida el conocimiento con un complemento, y se espera que los estudiantes que tienen integradas las tres experiencias consoliden sus aprendizajes y los recuerden con mayor consistencia, que si solo tuvieran una de las tres experiencias.



## ***La representación computacional en la formación de la capacidad de modelamiento***

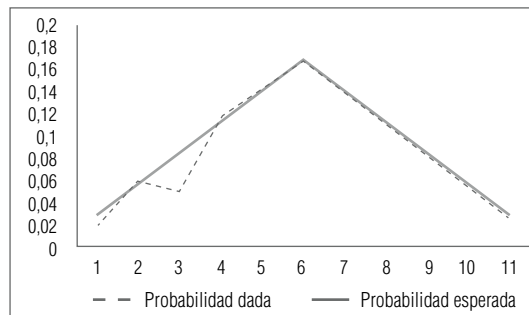
Pasar de una representación diagramática a una computacional es una práctica bien vista entre los programadores profesionales. Indudablemente que la diagramación es un soporte sólido para la programación. Esto no significa que esta última no añada dimensiones importantes en la comprensión del problema y del conocimiento que hace posible su solución. El siguiente es el código en MatLab derivado de la diagramación presentada, con los comentarios que explican cada paso y la gráfica generada por el programa:

```
function muestra(z)
% El sistema le pide al usuario que introduzca el tamaño del espacio muestral o número de veces que se deben tirar los dados
tam=input('Digite Tamaño: ')
% se inician las variables: A y B para cada dado; C2 hasta C12 para las veces que da cada resultado de la suma A+B
A=0; B=0; C2=0; C3=0; C4=0; C5=0; C6=0; C7=0; C8=0; C9=0; C10=0; C11=0; C12=0;
% simulación del lanzamiento de los dados
for x= 1 : tam
% se lanza el primer dado
A=randi(6,1,1);
% se lanza el segundo dado
B=randi(6,1,1);
% se calcula la suma de los dos dados
s=A+B;
% se actualizan los contadores para los posibles resultados
switch logical (true)
case s==2, C2=C2+1;
case s==3, C3=C3+1;
case s==4, C4=C4+1;
case s==5, C5=C5+1;
case s==6, C6=C6+1;
case s==7, C7=C7+1;
case s==8, C8=C8+1;
case s==9, C9=C9+1;
case s==10, C10=C10+1;
case s==11, C11=C11+1;
case s==12, C12=C12+1;
otherwise ('s');
end
end
% se construyen la matriz de las sumas
v=[C2/tam,C3/tam,C4/tam,C5/tam,C6/tam,C7/tam,C8/tam,C9/tam,C10/tam,C11/tam,C12/tam]
% se configura la matriz de las posibles sumas
vec=[2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12];
% se configura la matriz de valores esperados
mat=[1/36,2/36,3/36,4/36,5/36,6/36,5/36,4/36,3/36,2/36,1/36];
```

```

% se muestra cuál es la mejor opción
if(C4<C11)
    display('Mejor 11');
else
    display('Mejor 4');
end
% se genera la gráfica que contrasta los valores esperados con los valores
% obtenidos
plot (vec,v)
hold on;
plot (vec,mat, 'r')
hold off;

```



**Figura 10.** Curvas de probabilidad esperada y probabilidad observada con una muestra de 100 eventos, resultado del programa en MatLab.

El programa simula un espacio muestral de eventos, cuyo tamaño es introducido por el usuario. La gráfica toma 100 lanzamientos, pero se puede configurar con el tamaño que se desee. El programa grafica también la probabilidad esperada. Al hacerlo así, se puede probar que en la medida en que se aumenta el tamaño de la muestra las dos curvas tienden a superponerse, fenómeno que difícilmente se aprecia con cálculos manuales. Al hacer la simulación, el programa muestra cómo la mayoría de las veces es mejor apostar por el 4 que por el 11.

A partir de esta simulación, los estudiantes fácilmente se formulan preguntas nuevas, posiblemente más complejas que pueden resolver introduciendo modificaciones al código.

### Segundo ejemplo: el caso del semáforo

Conducir probablemente sea la actividad cotidiana más compleja que lleva a cabo un ser humano, pues está formada por, al menos, 1.500 subcompetencias, según estimaron McKinght y Adams (1970).

Un estudio de un tramo de carretera en Maryland (EE.UU.) reveló que aparecía información cada 0,6 metros, lo que a 48 km por hora significa estar

expuesto aproximadamente a 1.320 ítems, o 440 palabras por minuto. El equivalente sería leer tres o cuatro párrafos de un libro mientras se contempla a la vez un puñado de imágenes.

El simple encuentro con un semáforo en amarillo pone en funcionamiento una compleja cadena de pensamientos que fundiría los circuitos de cualquier ordenador. ¿Cuánto tiempo le queda al semáforo?, ¿me dará tiempo?, ¿cuánto tengo que acelerar para conseguirlo?, ¿vale la pena?, ¿infringiré alguna norma?, ¿si decido frenar de golpe, me dará el automóvil que tengo detrás?, ¿si apuro demasiado, el automóvil del otro semáforo tiene aspecto de que acelerará antes de tiempo, produciendo una colisión?, ¿está mojada la calzada?, ¿quedaré atrapado en un cruce, bloqueando el paso?

La presente investigación ha encontrado un potencial pedagógico especial en el desarrollo gradual de la secuencia representación verbal, algebraica, diagramática y computación, que desarrollamos con nuestros estudiantes del curso Modelamiento y Simulación. A continuación, se detalla esta secuencia con el caso del semáforo.

### ***Caso paro representación verbal***

Pancho es un conductor novato que sale a conducir su automóvil para conocer más detalladamente las vías de la ciudad y, de paso, adquirir mayor habilidad de manejo. En cierto punto de su viaje, se desplaza por una calle a la máxima velocidad permitida ( $82.8 \text{ Km/h}$ ). Cuando el vehículo está a 65 metros de la siguiente intersección, se ve cambiar el semáforo de verde a amarillo (figura 11).



**Figura 11.** Diagrama del cruce en donde está instalado el semáforo.

Pancho debe tomar la decisión de seguir adelante o frenar. Se le presenta un dilema en la decisión al atender tanto a la legalidad como a la seguridad del resultado: si sigue adelante, debe cruzar la calle de la intersección antes que la luz cambie a roja; si frena, el vehículo debe detenerse antes de la intersección.

Para analizar en grupo:

- ¿Acaso la decisión es irrelevante?
- ¿Según su vivencia cotidiana, cuáles serían las posibles consecuencias de tomar la opción errónea?

- ¿Qué variables deben ser consideradas en la decisión?
- ¿Sería útil la matemática para resolver la inquietud de Pancho?

Vamos a suponer que la luz amarilla está encendida durante 3 segundos antes de que la luz se vuelva roja. Además, el ancho de la intersección es de 15 metros, el tiempo de respuesta promedio humana es 1 segundo, la longitud del automóvil es 3 metros y la desaceleración del vehículo es  $5 \text{ m/s}^2$ .

### Preguntas para resolver en colectivo:

- ¿Se debe frenar o seguir adelante?
- Si el tiempo de luz amarilla fuese de  $4 \text{ s}$ , como varía la respuesta a la pregunta anterior?

### Solución propuesta y como referencia y base para proveer *feedback*

El conductor debe decidir entre parar o seguir. A continuación se ilustran cada una de las opciones que tiene el conductor, si el tiempo de la luz amarilla es  $3 \text{ s}$ :

- Seguir: cruzar toda la intersección requiere recorrer  $65 + 15 + 3 = 83$  metros, que deben ser cubiertos antes de que la luz cambie a rojo; pero a esa velocidad y con ese tiempo, el auto sólo podrá recorrer  $23 \times 3 = 69$  metros, antes de cruzar completamente y después de la intersección.
- Parar: para realizar con éxito la maniobra de parada, se debe cumplir que la distancia de frenado debe ser menor que la distancia disponible total menos la distancia recorrida durante el tiempo reacción. Mientras el conductor decide frenar ( $1 \text{ s}$ ), el automóvil recorrerá  $23 \times 1 = 23$  metros de los 65 metros hasta la intersección. De tal forma, deberá frenar antes de  $65 - 23 = 42$  metros. Si usamos la relación de cinemática:

$$V_f^2 - V_0^2 = 2add = \frac{V_f^2 - V_0^2}{2a}$$

para calcular la distancia de frenado, obtenemos que la distancia de frenado es

$$\text{Distancia de frenado} = \frac{-(23)^2}{2(-5)} = 53\text{m}$$

Así, si no se alcanzara a frenar antes de la esquina, el vehículo se detendrá en la mitad del cruce.

### ***Paso a la representación algebraica***

Problema: ¿cómo podría estimar el tiempo que debería durar la luz amarilla del semáforo para que no exista zona de dilema?

Pancho, molesto al descubrir la sin salida de esta situación, se propone encontrar alguna solución para el dilema y presentarla a las autoridades responsables. De esta manera, caracterizó la situación así:

Un auto se acerca a la intersección a la máxima velocidad permitida ( $82.8 \text{ Km/h}$ ). Cuando el vehículo está a  $x$  metros de la intersección, se cambia el semáforo de verde a amarillo. El conductor se ve forzado a tomar la decisión de seguir adelante o frenar, y el resultado debe ser al mismo tiempo legal y seguro: si sigue adelante, el vehículo debe cruzar totalmente la intersección antes que la luz cambie a roja; si decide frenar, el vehículo debe detenerse antes de la intersección.

También hizo los siguientes supuestos:

- La luz amarilla está encendida durante  $T$  s antes de que la luz se vuelva roja.
- El ancho de la intersección es de 15 metros.
- El tiempo de respuesta promedio humana es 1 segundo.
- La longitud del automóvil es 3 metros.
- La desaceleración del vehículo es  $5 \text{ m/s}^2$ .

### ***Definiciones***

- $x_o$ : Distancia máxima del automóvil a la intersección, más allá de la cual no alcanzaría a pasar, mientras la luz aún está en amarillo.
- $x_c$ : Distancia mínima del automóvil a la intersección en la cual un vehículo podrá detenerse antes del cruce.

Para un lugar en particular, las magnitudes relativas de las dos distancias críticas  $x_o$  y  $x_c$  determinan si un vehículo puede o no ejecutar con seguridad y legalidad, cualquiera de las dos maniobras.

1. Encuentre una expresión que relacione  $x_o$  y el tiempo de duración de la luz amarilla  $T$ .
2. Encuentre una expresión que relacione  $x_c$  y el tiempo de duración de la luz amarilla  $T$ .

3. Interprete que pasa si  $x_c < x_o$ .
4. Interprete que pasa si  $x_c > x_o$ .
5. Interprete que pasa si  $x_c = x_o$ .
6. ¿Cómo eliminaría la zona de dilema?

**Solución propuesta como referencia y base para proveer feedback**

1. 
$$x_o + w + L = V_o T$$

$$x_o + 15 + 3 = 23T$$

$$x_o = 23T - 18$$

2. 
$$x_c = V_o t_r + \frac{V_f^2 - V_o^2}{2a} = (23)(1) + \frac{23^2}{2(5)} = 76$$

3.  $x_c < x_o$ : Existe un límite claro en el que se debe parar o seguir al aparecer la luz amarilla. De hecho, existe una zona de longitud  $x_o - x_c$  donde el conductor puede ejecutar cualquiera de las dos maniobras.

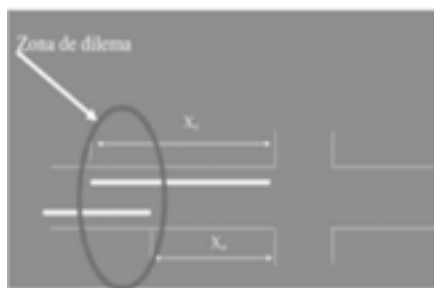
Un detalle que debemos notar es que en este caso aunque la duración de la luz amarilla es segura podría durar mucho más tiempo del estrictamente necesario (figura 12).

4.  $x_c > x_o$ : Existe una zona de dilema de longitud  $x_o - x_c$ . Un vehículo en dicha zona que se aproxima a la intersección al límite de la velocidad no podrá ejecutar ninguna de las dos maniobras con seguridad ni legalidad (figura 13).

5.  $x_c = x_o$ : Representa la situación límite; igual que el caso anterior existe un límite tajante de dónde se debe parar o seguir, pero no se desperdicia tiempo.



**Figura 12.** Condición de la solución.



**Figura 13.** La zona de dilema, en la cual el vehículo no podrá realizar ninguna de las dos maniobras con seguridad.

6. La zona de dilema puede eliminarse de dos formas:

- $\zeta$

$$x_0 = x_c$$

$$23T - 18 = 76$$

$$T_{\min} = \frac{76 + 18}{23}$$

$$T_{\min} = 4.085$$

### Representación diagramática

Una vez que se ha logrado una solución algebraica para dar una recomendación, podría representarse gráficamente el proceso seguido. Probablemente la lógica expresada en el diagrama que se elabore pueda ser útil para los programadores de sistemas.

Dada la situación a los supuestos de Pancho para el caso del semáforo, diseñe un diagrama que muestre una secuencia de procesos que permitan estimar el valor mínimo que debe durar la luz amarilla del semáforo de tal forma que  $x_c = x_0$ . Para esto, debe guiarse por la forma de realizar los cálculos algebraicos presentados arriba.

Es importante que al iniciar identifique cuáles son las variables que entran en juego en la solución del problema, si sus valores están dados o si se necesita calcularlos, qué decisiones se requiere tomar en las diferentes etapas de la solución y cuáles son los procesos de cálculo requeridos para encontrar la solución.

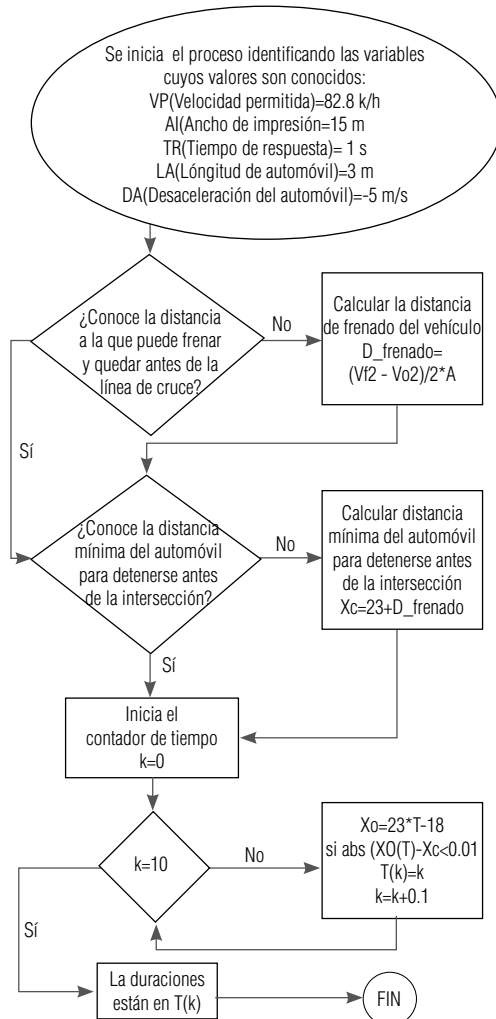


Figura 14. Solución diagramática al problema del semáforo.

### ***Solución propuesta y base para proveer feedback***

La figura 14 muestra una solución posible al problema del semáforo. Toma como base el proceso seguido en la solución algebraica. Distingue la inicialización de variables, las decisiones en cada etapa del proceso, los procesos desarrollados y el resultado final.

### **Representación computacional**

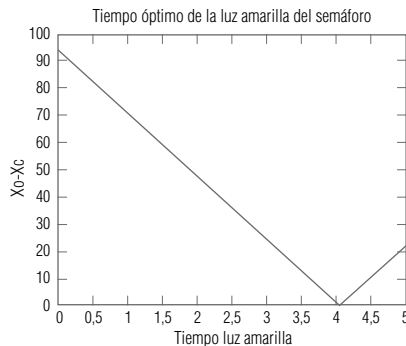
¿El diagrama elaborado en la solución anterior podría llevar a generar un programa de computador y podría entonces simularse la situación del semáforo?

Para avanzar en la solución, se debe implementar en código de MatLab los pasos del algoritmo expresado en la solución diagramática encontrada para el problema del semáforo. Programe como salida un gráfico que muestre las relaciones entre el tiempo y las variables críticas de la solución.

### ***Solución propuesta y base para proveer feedback***

```

IPunto1
IInicializa los datos conocidos
a=-6;
vf=0;
vo=23;
w=15;
L=3;
ICalcula de la distancia minima de frenado
D_frenado=(vf^2-vo^2)/(2*a)
ICalcula EC
EC=23*D_frenado
ISe generan 50001 valores distintos para T
T=0:0.0001:5;
ISe calcula el valor de X0 para cada uno de los 50001 Ts
X0=23*T-18;
ISe prueban los valores de T hasta obtener el adecuado
for k=1:50001
    if abs(X0(k)-EC)<0.001
        T(k)
    end
end
IPunto 2
TABLA = [T' X0']; ICreacin de la tabla solicitada
IPunto 3
dif=abs(X0-EC);
plot(T,dif)
    
```



**Figura 15.** Simulación del problema del semáforo.



## Conclusiones

En este capítulo se ha presentado la formación de la competencia de modelamiento desde una perspectiva de la cognición humana y se ha mostrado con ejemplos una forma de orientar la práctica pedagógica de formación de esta competencia: la relación entre la percepción y la formación de modelos mentales, entre estos y la construcción de modelos conceptuales que se expresan a través de formas de representación y de estos con la comunicación y la construcción colaborativa de conocimiento.

En este enfoque, la explicación de un facilitador o la lectura de un texto son insuficientes para la formación de la competencia, se requiere del ejercicio de construcción del modelo conceptual; las cuatro formas de representación consolidan la habilidad que integra el modelo mental al conceptual. Nuestro razonamiento conduce a pensar que las cuatro formas de representación se complementan mutuamente, que el conocimiento se desarrolla en una forma de espiral y que en la medida en que se avanza, el nivel de profundidad de los aprendizajes es mayor.

La representación verbal en procesos argumentativos tiene gran potencial para identificar variables de contexto, desarrollar la capacidad de control sobre el proceso argumentativo y su calidad y para formar categorías ontológicas. La relación entre categorías ontológicas con las categorías del dominio de conocimiento es de especial potencial en la construcción de conocimiento.

La representación algebraica tiene especial potencial para identificar relaciones estructurales. El nivel de abstracción es la base para hacer comparaciones estructurales. En el hallazgo de isomorfismos y homomorfismos se establecen las bases para la transferencia de conocimiento.

La representación diagramática desarrolla conocimiento sobre procesos y estrategias de planeación de procesos y construcción de procedimientos. Es la base para la construcción de técnicas de solución de problemas.

La representación computacional genera posibilidades de jugar con escenarios, analizar soluciones alternativas de problemas y, por lo tanto, es la base del razonamiento prospectivo.

## Referencias

- Jonassen, D. H. (2006). *Modeling with Technology: Mindtools for Conceptual Change*. Columbus, Ohio: Pearson Prentice Hall.
- Llinás, R. (2002). *El cerebro y el mito del yo: el papel de las neuronas en el pensamiento y el comportamiento humano*. Bogotá, D. C.: Editorial Norma.

- McKnight, A. J. y Adams, B. B. (1970). *Driver Education Task Analysis*. Vol. I: Task descriptions. (Report No. DOT-HS-800-367, HUM-PRO-TR-70-103). Washington: National Highway Traffic Safety Administration.
- Maldonado, L. F. (2012). *Virtualidad y autonomía: pedagogía para la equidad*. Bogotá: Iconk Editorial.
- Maldonado, L. F., De Groot, R. y Drachman, R. (eds.) (2012). *Argumentación para el aprendizaje colaborativo de la matemática*. Bogotá: Ediciones Universidad Central.
- O'Reilly, R. C. y Munakata, Y. (2000). *Computational Explorations in Cognitive Neuroscience*. Cambridge, Massachusetts: The MIT Press.
- Quine, W. V. O (1960). *Word & Object*. Cambridge, Massachusetts: The MIT Press.
- Sowa, J. F. (1986). *Conceptual Structures: Information Processing in Mind and Machine*. Reading, Massachusetts: Addison-Wesley Publishing Company.
- Sowa, J. F. (2000). *Knowledge Representation: Logical, Philosophical and Computational Foundations*. Brooks/Cole, Thomson Learning.
- Vygotsky, L. S. (1978). *Pensamiento y lenguaje*. Madrid: Editorial Paidós.

## Capítulo 5



# La representación verbal en el desarrollo de la competencia de modelamiento matemático

Luis Bayardo Sanabria Rodríguez\*

David Macías Mora\*\*

Myriam Sofía Rodríguez\*\*\*

Adriana Rocío Lizcano Dallos\*\*\*\*

### Introducción

Este capítulo presenta un escenario en donde la solución de casos se da en un ambiente virtual que favorece la argumentación y hace posible la representación del proceso de solución de forma verbal, y aporta al desarrollo de la competencia de modelamiento matemático. La discusión sobre la lectura de fenómenos, la identificación de variables y sus relaciones, sus posibles formas de representación y la interpretación de un modelo construido desde sus aplicaciones, alcances y limitaciones, posibilitan el desarrollo de la competencia de modelamiento. La incorporación de la argumentación como actividad social en el proceso de solución de casos y de su representación gráfica, denominada mapa argumentativo, activa la discusión sobre las diferentes percepciones tanto

---

\* Ph. D. y profesor e investigador de la Universidad Pedagógica Nacional. Perteneció al grupo de investigación Cognitek. Correo electrónico: lubsan@gmail.com

\*\* M. Sc. y profesor e investigador de la Universidad Central, Departamento de Matemáticas. Perteneció al grupo de investigación Tecnimat. Correo electrónico: dmaciasm@ucentral.edu.co

\*\*\* M. Sc. y profesora e investigadora de la Universidad Central, Departamento de Matemáticas. Perteneció al grupo de investigación Tecnimat. Correo electrónico: mrodriguez5@ucentral.edu.co

\*\*\*\* M. Sc. y profesora e investigadora de la Universitaria de Investigación y Desarrollo (UDI). Perteneció al grupo de investigación Gidsaw. Correo electrónico: alizcano@udi.edu.co

del fenómeno como del proceso de solución. El *software* Argunaut<sup>1</sup> es un ambiente que posibilita la representación verbal del proceso de solución del caso y la lectura retrospectiva, para los intereses de los estudiantes o el administrador del escenario de aprendizaje.

## Antecedentes y marco conceptual

Una estrategia para desarrollar la competencia de modelamiento es la interacción social. Este tipo de interacción se da entre dos o más personas que construyen conocimiento a través de la comunicación. La dinámica del diálogo se genera a partir de una idea que sirve de base para coordinar la discusión del tema que se está desarrollando. En la medida en que existen acuerdos, el diálogo se va ajustando de tal forma que cada participación de una persona se centra en la estructura que se va consolidando hasta obtener un modelo. Las acciones de pulimento y precisión conceptual que conducen al desarrollo del modelo son las que podrían aproximarse al desarrollo de competencias de modelamiento. De acuerdo con Clark (2002), la conversación surge cuando dos o más personas utilizan el diálogo para coordinar tareas que realizan de manera colaborativa. La estructura de la conversación surge a partir del diálogo, la planeación y la negociación.

En la solución de un problema, como por ejemplo los casos trabajados en esta investigación, se desarrolla la interacción mediada por un ambiente virtual como Argunaut. Este ambiente de aprendizaje establece una interfaz de conversación entre dos o más personas que trabajan juntas, compartiendo opiniones sobre una tarea o problema que se les plantea (Clark, 2002). El ambiente computacional es un apoyo en el desarrollo de la tarea. En este contexto, se pueden establecer conexiones entre los pares, el tutor y los recursos de aprendizaje (Dillenbourg, Schneider y Synteta, 2002). Cada estudiante asume un rol que le ayuda a determinar sus acciones y verbalizaciones en el proceso de solución. Existen metas que la persona fija al inicio del proceso y otras que se generan durante el proceso y que están relacionadas con el intercambio de información, la planeación de acciones y la negociación. La construcción de conocimiento que surge como resultado de la interacción entre pares está dada por una situación de aprendizaje en la cual los estudiantes resuelven un problema: para ello acuden a combinar sus propias posiciones, basados en conocimientos y experiencias previas (Collins, Brown y Newman, 1989).

Basados en la propuesta del cambio conceptual planteada por Jonassen (2006) y el ciclo generado en la espiral de conocimiento (Maldonado, 2013), se

1 Argunaut es un *software* desarrollado en el proyecto europeo Argunaut, IST-2005-027728. Cuenta con la colaboración del grupo Kishurim y de otros grupos de la Red Europea de Argumentación.

puede inferir una ruta de aprendizaje que visualiza el proceso de modelamiento a partir de la argumentación. El modelo mental de los estudiantes, basado en el manejo conceptual que poseen y el procesamiento cognitivo que realizan a partir de un problema propuesto, los conduce a la generación de argumentos que se podrían materializar en una idea o solución. De acuerdo con la dinámica de la espiral, esta idea o argumento podría acercarse a la definición de un modelo conceptual. El ciclo continúa en la medida en que se utiliza este modelo para nuevamente activar procesos cognitivos de otras personas que intentan probarlo, hasta lograr encontrar un resultado que valide dicho modelo. Este proceso determina una situación de aprendizaje a través de la colaboración, donde existe una controversia y una negociación que facilita la comprensión y construcción de conocimiento. A continuación, se expone una aproximación al concepto de aprendizaje colaborativo.

### **Aprendizaje colaborativo**

La colaboración se presenta cuando existe una interacción social entre dos o más personas que se comunican para controvertir o negociar el conocimiento, mientras resuelven un problema o una tarea. Noble y Letsky definen la colaboración a partir de “los aspectos mentales de la resolución conjunta de problemas con el propósito de mejorar la comprensión compartida, la toma de decisiones o la creación de un producto” (2005). Otros autores como Alberts, Garstka, Hayes y Signori consideran la interacción colaborativa de “actores que comparten activamente datos, información, conocimiento, percepciones o conceptos cuando están trabajando juntos con un propósito común y la forma como ellos mejoran tal proceso eficiente y efectivamente” (2001).

Otra versión de esta definición la plantea Dillenbourg, quien trabaja el concepto de aprendizaje colaborativo a partir de la interacción entre varios individuos. Este autor define el aprendizaje colaborativo como “una situación en la cual dos o más personas aprenden o intentan aprender alguna cosa juntos” (1999, p. 2). De acuerdo con Dillenbourg, el aprendizaje colaborativo se caracteriza por una comunicación sincrónica de los integrantes del grupo colaborativo y un proceso de negociación, consistente en la presentación de argumentos que justifiquen el punto de vista de cada persona para intentar convencer al otro. Si se analiza el planteamiento de Dillenbourg en el contexto de la argumentación, se podría evidenciar una situación de aprendizaje colaborativo, soportada en la forma como se desarrolla el aprendizaje, donde sus actores se comunican de manera sincrónica para compartir sus puntos de vista, basados en una propuesta de solución de problemas. Conforme al proceso de negociación, sustentado en esta teoría, existe un espacio donde se presentan los con-

ceptos e ideas que son discutidas, controvertidas, para llegar a acuerdos que se reflejan en un modelo. Cuando existe claridad sobre el modelo, termina el proceso de negociación. Esta lógica se observa en la solución de los casos propuestos para el desarrollo de la investigación sobre modelamiento. Hipotéticamente, se pensaría que el desarrollo de competencias de modelamiento estaría ligado a la capacidad que tiene cada individuo para negociar su posición frente a los demás. Esta presunción sería objeto de investigación.

De otro lado, si se hace un inventario de los escenarios donde se desarrolla el aprendizaje colaborativo, se podría acudir a los ambientes virtuales de aprendizaje. La interfaz que ofrecen estos ambientes es el espacio de comunicación dispuesto en una ontología que facilita la interacción de los pares y orienta el camino de solución de los problemas. A continuación, se hace referencia a este sistema de representación cognitiva.

### **Ontologías para la interacción colaborativa**

Una ontología se constituye en un lenguaje donde se establece una comunicación entre dos o más personas, para compartir conocimiento. Gruber define una ontología como “una conceptualización formal y explícita de un conocimiento compartido” (1993). La ontología está determinada por un vocabulario descrito a través de un conjunto de categorías y objetos relacionados (Guarino, 1992).

El espacio semántico constituido por una ontología genera un contexto que posibilita la identificación y utilización de elementos relacionados con la percepción, para materializarlos en la construcción de conocimiento. Esta transformación es un elemento importante en el proceso de aprendizaje colaborativo. La integración de categorías ontológicas en la construcción conceptual es un proceso útil para definir las relaciones entre los conceptos (o las ideas) que maneja la persona y el lenguaje que utiliza para comunicar su conocimiento a otros (Guarino, 1998).

Esta concepción determina las clases y relaciones necesarias para establecer una comunicación entre pares, así como la interacción entre ellos genera los argumentos, donde se incluyen las ideas o los conceptos que aportan a la construcción de un modelo. Un modelo se concreta con la construcción de conocimiento, e incluye los datos y la composición de la información.

Weggeman (1997) define los datos como la representación de números, cantidades, magnitudes o hechos, y establece el origen de la información en el significado que le da una persona a los datos. El autor integra estos conceptos

para precisar el conocimiento a partir de la información que ha sido comprendida, interpretada y validada en un contexto.

Al considerar el modelo como una estructura de conocimiento, se puede plantear su evolución a partir de la interacción colaborativa, teniendo en cuenta tres etapas: la evolución del concepto hasta ser comprendido, la diversidad de los aportes para poderlo interpretar y la validación de tal concepto a partir de su aplicabilidad en el contexto. Estas fases podrían considerarse elementos válidos en el desarrollo de la competencia de modelamiento.

## Metodología

### Condiciones

El proceso de experimentación se llevó a cabo en dos instituciones universitarias colombianas: Universidad Central de Bogotá y Universitaria de Investigación y Desarrollo (UDI) de Bucaramanga, durante el segundo semestre académico de 2012 y con estudiantes de programas de ingeniería, distribuidos como lo muestra la tabla 1.

**Tabla 1.** Población del experimento

Institución universitaria	Curso	Semestre	Cantidad de estudiantes
Universidad Central	Matemáticas III	3	50
	Modelamiento y Simulación	4	25
Universitaria de Investigación y Desarrollo	Matemáticas III	3	30
	Dinámica de Sistemas	9	37

### Procedimiento

Cada uno de los cursos se distribuyó en pequeños grupos de 4 a 7 estudiantes, asignados aleatoriamente, que variaban en cada una de las sesiones de trabajo. En cada uno de los cursos se desarrolló un conjunto de casos o problemas contextualizados que buscan incentivar la discusión de los estudiantes a partir de la formulación de una pregunta generadora y de su participación en el espacio de discusión sincrónica en línea, denominado Argonaut 1.0. Las actividades de experimentación se desarrollaron en los siguientes momentos:

- Lectura del planteamiento del caso antes de iniciar la sesión o al inicio de la sesión.
- Discusión y situación (pregunta generadora).
- Retroalimentación por parte del docente encargado de la administración de la sesión de clase.
- Evaluación al inicio de la siguiente sesión de trabajo.

## **Modelo de análisis de la información**

### ***Análisis de los mapas argumentativos***

Para este proceso se definieron tres aspectos de análisis: análisis ontológico, análisis relacional y análisis de clúster, para los cuales se definieron los siguientes indicadores:

- *Análisis ontológico.* Revisa el número de formas ontológicas utilizadas por cada estudiante en cada uno de los mapas argumentativos, distribuidos de acuerdo con la ontología definida: solución, propuesta, pregunta, fórmula y explicación.
- *Análisis relacional.* Revisa el número de cada uno de los tipos de relaciones que unen las formas ontológicas utilizadas por cada estudiante. Esto implica que se definieron: cantidad de enlaces de apoyo que entran, cantidad de enlaces de apoyo que salen, cantidad de enlaces de oposición que entran y cantidad de enlaces de oposición que salen.
- *Análisis de clúster.* Identifica grupos de formas ontológicas que están relacionadas y que desarrollan una idea central. De este análisis se establecieron: número de clúster, cantidad de contribuciones al clúster, idea central que desarrolla el clúster, contribuyentes al clúster y descripción del proceso argumentativo que se ejecutó en el clúster.

### ***Análisis estadístico***

En el análisis estadístico se pretende ver el efecto de la representación verbal en la solución de casos sobre el rendimiento académico. Se hace un análisis de regresión, en donde se toma como variable dependiente el resultado obtenido en cada una de las evaluaciones del semestre: en el primer corte (30%), en el segundo corte (60%) y en el examen final; como variables independientes, se toman el curso y la frecuencia de uso de cada una de las categorías ontológicas.



## Análisis de datos

El desarrollo de casos para el modelamiento matemático, utilizando la representación de los procesos argumentativos como estrategia de comunicación y de solución verbal, es una expresión de la interacción con categorías ontológicas que están distribuidas en redes de participación, donde se asocian las intervenciones mediante relaciones.

Con miras a observar el efecto de la estrategia de argumentación en el desarrollo de la capacidad de modelamiento, se hace un análisis cualitativo a partir del procesamiento de los datos ontológicos, que relacionan tres componentes: frecuencia en el uso de cada una de las categorías ontológicas, frecuencia en el establecimiento de cada tipo de relación y la identificación de núcleos de construcción de conocimiento (agrupamientos o clúster) que permitan establecer o categorizar los diferentes momentos en el proceso de solución de problemas sobre modelado matemático.

### Análisis de categorías ontológicas

Se analizó la frecuencia de uso de categorías ontológicas utilizadas por cada estudiante, en cada uno de los mapas argumentativos, de acuerdo con la ontología definida: solución, propuesta, pregunta, fórmula y explicación (tabla 2).

**Tabla 2.** Uso de categorías ontológicas en la solución argumentativa de problemas por universidad y asignatura

FRECUENCIA DE USO DE CATEGORÍAS					
Asignatura	Solución %	Propuesta %	Pregunta %	Fórmula %	Explicación %
Universidad Central - Matemáticas III	16,26	45,72	18,83	12,96	5,63
Universidad Central - Modelamiento y Simulación	17,67	57,32	6,62	4,75	13,64
Universitaria de Investigación y Desarrollo - Matemáticas III	4,96	52,38	15,39	3,30	24,32
Universitaria de Investigación y Desarrollo - Dinámica de Sistemas	1,0	5,4	61,8	16,1	15,7
Media	9,9725	40,205	25,66	9,2775	14,8225

La tabla 2 muestra el porcentaje de uso de categorías en la solución argumentativa de problemas de Matemáticas III y Modelamiento y Simulación en las dos universidades. Se puede observar que en la solución de los casos en tres asignaturas, la categoría de mayor frecuencia de uso es *propuesta*. En las otras

categorías no se identifica una regularidad de uso, lo cual permite inferir que posiblemente el uso de categorías está asociado al tipo de problema o a la asignatura. Además, son notorios los bajos porcentajes de uso de las categorías *solución* y *fórmula*, que se pueden explicar por la poca iniciativa de los estudiantes para plantear conclusiones definitivas que se caractericen como soluciones del problema o fórmulas finales que se van a utilizar. Normalmente, las fórmulas se incluían en las propuestas que realizaban, lo que debería generar una discusión acerca de la definición de las categorías ontológicas propuestas.

### **Análisis de relaciones**

La participación de los estudiantes en la solución del caso se hace al seleccionar una de las formas que ofrece la herramienta: solución, propuesta, pregunta, fórmula y explicación, escribiendo su participación en ellas y enlazando su participación con los diferentes tipos de enlace: negro (conexión), flecha verde (apoyo) y flecha roja (oposición). El mapa que se genera recibe el nombre de mapa argumentativo. A partir de este mapa argumentativo se puede elaborar una red social, en donde los nodos son los diferentes actores (estudiantes) que participaron en la sesión, y las aristas son las diferentes conexiones.

**Tabla 3.** Porcentaje de relaciones usadas en cada una de las asignaturas

FRECUENCIA DE USO DE RELACIONES					
Asignatura	Apoyo		Oposición		Conexión %
	Entradas %	Salidas %	Entradas %	Salidas %	
Universidad Central - Matemáticas III	24	20	2,5	1,5	52
Universitaria de Investigación y Desarrollo - Matemáticas III	22,3	17,9	7,5	6,0	46,4
Universidad Central - Modelamiento y Simulación	26	25	5	5	39
Universitaria de Investigación y Desarrollo - Dinámica de Sistemas	22	21	6	6	45

En la tabla 3 se registra el porcentaje de la frecuencia de uso de los diferentes tipos de relaciones que utilizaron los estudiantes en la solución verbal de los casos que se plantearon en los cuatro grupos que participaron en la experiencia. Se puede observar que el mayor conector que se utilizó en los cuatro grupos o asignaturas fue *conexión*, que corresponde a una relación neutra: está entre el 39% y el 52%. El conector de menor uso es el de *oposición*, al presentar un porcentaje que está entre el 1,5% y el 7,5%. Esta tendencia en el uso de

las relaciones neutras podría indicar que los estudiantes no tienen la disciplina de expresar su opinión tomando el contenido de sus compañeros de una forma crítica, razón por la cual se presenta una mayor dificultad para declararse en oposición, pues esto conlleva una mayor necesidad de argumentación para defender sus propuestas.

### ***Análisis de la construcción conjunta de conocimiento***

El análisis del desarrollo de la competencia de modelamiento a partir de la construcción de conocimiento se basa en la identificación de clústeres (agrupamientos), definidos por las ideas o los conceptos que se van consolidando en la medida en que los estudiantes se unen con sus aportes para poderlo desarrollar. Este proceso determina una construcción conjunta de conocimiento que puede comenzar, por ejemplo, con proponer una ecuación o fórmula por parte de un participante del clúster y continuar con la agregación de parámetros que complementan la fórmula; en este caso, podría existir la participación de otros miembros que se unen al clúster para contribuir con sus aportes y finalizar con la obtención de una solución. Para el estudio propuesto, un clúster se caracteriza por el hecho de que se construye a partir de una idea o concepto que sirve de base para su desarrollo: se requiere como mínimo la participación de dos actores; su evolución se da en la medida en que existen aportes de sus miembros a la construcción de conocimiento.

**Tabla 4.** Síntesis de la construcción de clúster de conocimiento de los cuatro grupos participantes

CLÚSTER DE CONOCIMIENTO	
Momento	Idea generadora del clúster
Momento 1	Discusión sobre condiciones del caso
	Identificación de datos y variables
Momento 2	Cálculos particulares
	Discusión sobre posibles soluciones
	Propuesta del modelo
Momento 3	Identificación de elementos y características del modelo
	Interpretación del modelo
	Prueba del modelo

La tabla 4 muestra la síntesis de la construcción de clúster de conocimiento de los cuatro grupos participantes. La comparación de los grupos de las dos universidades muestra una serie de características comunes que podrían generar una estrategia general para el desarrollo de la competencia de

modelamiento. Se identifican tres momentos en el proceso de solución verbal de cada uno de los casos. En el momento 1, los estudiantes hacen una discusión sobre el contexto y las condiciones del caso: como producto de este momento se tiene la identificación de datos y variables que intervienen en el problema. En el momento 2 de la discusión, los estudiantes hacen cálculos para situaciones particulares del caso, en donde tratan de construir relaciones entre los datos y variables identificados en el momento anterior. Como producto de este momento, se tiene la propuesta de un modelo. El tema de discusión del momento 3 son los componentes y características del modelo propuesto como solución, es decir: los estudiantes hacen la interpretación del modelo. Como producto de este momento, se tiene un modelo más depurado y la prueba de este.

### *Ejemplo de caracterización de un hilo argumentativo*

A continuación se presenta la descripción de un hilo argumentativo, a manera de ejemplo, para ilustrar los momentos descritos en la sección anterior. La muestra representa un fragmento de las argumentaciones que componen este hilo. Los actores que participan en la construcción del clúster son: WToledo, JReal, CLópez, UCJParra, UCVGonzález y MBastidas.

Una vez planteado el problema, dos integrantes activan la categoría *propuesta* y uno activa la categoría *solución*; sin embargo, quien inicia planteando una pregunta es WToledo, indagando por una fórmula para resolver el problema. En seguida, JReal plantea otra pregunta que indaga sobre la velocidad inicial y que se conecta con el problema. A continuación, WToledo plantea como propuesta una fórmula que relaciona las velocidades inicial y final con la aceleración y el espacio. CLópez da una solución que responde a la pregunta de JReal; por su parte, UCJParra propone un paso para aplicar la fórmula, mientras que WToledo conecta su fórmula propuesta con su pregunta, y JReal conecta su pregunta con la respuesta de CLópez. Hasta este momento, se infiere que existe un sincronismo en las participaciones: todos apuntan hacia la misma idea, caracterizada por la fórmula propuesta por WToledo.

Nuevamente, WToledo pregunta acerca de la velocidad inicial, que se conecta con su fórmula planteada; esta, a su vez, es conectada por él mismo al problema formulado. En este momento pareciera que él ha desarrollado una solución de manera solitaria, mientras que sus compañeros están trabajando paralelamente, pero atados a la propuesta de WToledo. En paralelo, UCV-González se pregunta sobre los 3 segundos planteados en el problema, para llegar al semáforo o cruzar la intersección, y enlaza su pregunta con el problema. WToledo elimina su pregunta y cambia la fórmula para proponer la utili-

zación de unas leyes que no concreta. CLópez propone otra variable referida al tiempo, la cual, según él, no aparece en los datos.

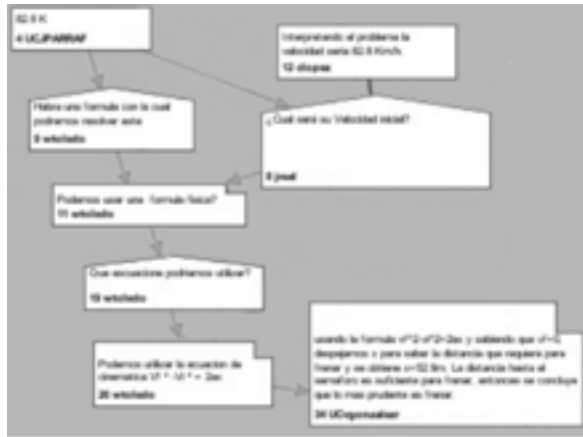


Figura 1. Fragmento de un hilo argumentativo.

Nuevamente aparece WToledo para concretar el tipo de leyes que dejó inconclusas: se refiere a las leyes de Newton; además, realiza una pregunta acerca de qué leyes se van a aplicar. WToledo conecta las dos preguntas con la propuesta, como apoyo de unas con respecto a la otra. Hasta este estado de participación, se sigue evidenciando una construcción solitaria de WToledo, mientras que sus pares de forma paralela tratan de identificar las variables del problema.

En la escena aparece por primera vez MBastidas para proponer una respuesta que conecta como oposición a la pregunta de UCVGonzález. Nuevamente aparece WToledo para concretar con una propuesta la respuesta a su última pregunta: se refiere a la segunda ley. Paralelamente, UCJParra plantea una solución con un valor concreto que apoya a la primera pregunta de WToledo; además, conecta como apoyo su propuesta anterior a la primera pregunta de WToledo.

A partir de la observación anterior, el hilo argumentativo se desarrolla de tal forma que se establece una estructura enmarcada en una fórmula, sobre la cual se conectan otros hilos adyacentes representados en las participaciones del grupo. Un primer hilo establece la estructura de la solución al problema, representada en la fórmula. Un segundo hilo se articula a través de la prueba de la estructura, reemplazando las variables por valores. Un tercer hilo presenta una solución al problema, corroborando la estructura. En esta lógica, se puede ver que la evolución del proceso de modelación se desarrolla a partir del planteamiento de una ecuación que se va validando en la medida en que otros hilos aportan a la construcción de una solución del caso planteado.

### Uso de categorías argumentativas y logro académico: análisis de regresión

Para ver el efecto de la representación argumentativa en la solución de problemas sobre el rendimiento académico, se hace un análisis de regresión entre la participación de los estudiantes con cada una de las categorías argumentativas y su rendimiento académico, según la nota de cada uno de los cortes del semestre (al 30%, al 60% y examen final) (tabla 5).

**Tabla 5.** Análisis de regresión con los resultados de la evaluación del primer corte (30%), como variable dependiente, y el curso y la frecuencia de uso de categorías durante la solución del primer caso

Análisis de relaciones estadísticas						
Regression Summary for Dependent Variable: Treinta						
R = 0,52089945 R <sup>2</sup> = 0,27133624 Adjusted R <sup>2</sup> = 0,22538447						
F(7,111) = 5,9048 p<0,00001 Std. Error of estimate: 0,89391						
	Beta	St. Err. of beta	Beta	St. Err. of beta	t(111)	p-level
Intercpt			69,44386	13,86569	5,00832	0,000002
Curso	-0,47	0,096695	-0,65916	0,13683	-4,81733	0,000005
Solución 1	-0,005	0,111696	-0,00758	0,17378	-0,04362	0,965282
Propuesta 1	-0,019	0,103804	-0,01390	0,07521	-0,18482	0,853704
Pregunta 1	-0,033	0,101002	-0,03339	0,10310	-0,32383	0,746676
Fórmula 1	0,026	0,087964	0,04301	0,14442	0,29782	0,766395
Explicación 1	0,150	0,083880	0,15239	0,08541	1,78415	0,077132
Información 1	0,031	0,130406	0,01212	0,05087	0,23835	0,812048

El análisis de regresión múltiple (tabla 6) toma el resultado en la primera evaluación como variable dependiente y como variables independientes el curso y la frecuencia de uso de las categorías: propuesta, pregunta, fórmula, explicación e información. En el primer caso estudiado por los alumnos (tabla 5), da un valor de  $F(7,111) = 5,9048$ , con  $p < 0,00001$  y un error estimado de 0,89391. Los pesos beta, asociados con las variables *curso* y *explicación*, muestran, con base en la *prueba t*, un efecto significativo sobre la variable dependiente, no así el uso de las otras categorías.

**Tabla 6.** Análisis de regresión con los resultados de la evaluación del segundo corte (60%), como variable dependiente, y el curso, la frecuencia total usada en el primer caso y la frecuencia de uso de categorías durante la solución del segundo caso

Regression Summary for Dependent Variable: Sesenta						
R = 0,41932662 R <sup>2</sup> = 0,17583481 Adjusted R <sup>2</sup> = 0,11589553						
F(8,110) = 2,9335 p<0,00522 Std. Error of estimate: 0,99710						
	Beta	St. Err. of beta	Beta	St. Err. of beta	t(110)	p-level
Intercpt			-16,9392	18,37251	-0,92199	0,358554
Curso	0,130805	0,122903	0,1933	0,18158	1,06429	0,289527
Total 1	0,384511	0,103012	0,0777	0,02080	3,73269	0,000302

Regression Summary for Dependent Variable: Sesenta						
R = 0,41932662 R <sup>2</sup> = 0,17583481 Adjusted R <sup>2</sup> = 0,11589553						
F(8,110) = 2,9335 p<0,00522 Std. Error of estimate: 0,99710						
	Beta	St. Err. of beta	Beta	St. Err. of beta	t(110)	p-level
Solución 2	0,166310	0,106406	0,1993	0,12749	1,56297	0,120932
Propuesta 2	0,231231	0,109181	0,1176	0,05551	2,11788	0,036438
Pregunta 2	0,099061	0,093177	0,1465	0,13784	1,06315	0,290041
Fórmula 2	-0,071075	0,102011	-0,1235	0,17729	-0,69674	0,487436
Explicación 2	-0,042030	0,098327	-0,0495	0,11591	-0,42745	0,669884
Información 2	-0,240485	0,131635	-0,1157	0,06331	-1,82691	0,070424

Para los resultados de la segunda evaluación (60% del curso), también se aplica el modelo de análisis de regresión, tomando como variables independientes: el curso, la frecuencia total de uso de categorías en el primer caso, y la frecuencia de las categorías usadas en la solución del segundo caso (tabla 7). Los valores  $F(8,110) = 2,9335$ ,  $p < 0,00522$ , y el error estimado de 0,99710 (tabla 6), muestran que el modelo explica la varianza de la variable dependiente. El análisis de los pesos beta, mediante la *prueba t*, muestra como variables de efecto significativo: la frecuencia de uso de categorías en el primer caso y el uso de la categoría *propuesta*, a diferencia de la primera evaluación en la cual actuó con mayor fuerza la categoría *explicación*.

**Tabla 7.** Análisis de regresión tomando como variable dependiente la calificación del examen final. Se toman como variables independientes el curso, el total de uso de categorías en el primer caso, el total en la solución del segundo caso y las frecuencias de cada una de las categorías

Regression Summary for Dependent Variable: Examen final						
R = 0,51401779 R <sup>2</sup> = 0,26421429 Adjusted R <sup>2</sup> = 0,20346134						
F(9,109) = 4,3490 p<0,00007 Std. Error of estimate: 1,0318						
	Beta	St. Err. of beta	Beta	St. Err. of beta	t(109)	p-level
Intercpt			-96,0652	19,00591	-5,05449	0,000002
Curso	0,609494	0,116509	0,9817	0,18767	5,23130	0,000001
Total 1	0,285137	0,100825	0,0628	0,02220	2,82803	0,005575
Total 2	0,087133	0,089096	0,0217	0,02223	0,97796	0,330260
Solución 3	0,186144	0,096337	0,1528	0,07909	1,93220	0,055930
Propuesta 3	0,011000	0,108075	0,0055	0,05425	0,10178	0,919120
Pregunta 3	-0,094234	0,100921	-0,1131	0,12112	-0,93374	0,352500
Fórmula 3	0,051811	0,090133	0,1262	0,21959	0,57483	0,566589
Explicación 3	0,167581	0,093734	0,1834	0,10256	1,78784	0,076580
Información 3	-0,024082	0,139493	-0,0097	0,05608	-0,17264	0,863253

Entonces se obtiene el modelo de regresión aplicado a los resultados en el examen final, usando como variables independientes el curso, la frecuencia total de uso de categorías en el primero y segundo caso, y la frecuencia de categorías en la solución del tercer caso. Nuevamente, el modelo de regresión da valores que muestran que hay un impacto sobre la variable dependiente (tabla 8). Los valores  $F(9,109) = 4,3490$ ,  $p < 0,00007$ , y el error estimado de 1,0318 (tabla 7), muestran este efecto. Las variables “curso” y uso de categorías en el caso 1 (total 1) son las variables de efecto significativo. Las frecuencias de las categorías *solución* y *explicación* tienen un valor cercano al nivel de significación.

**Tabla 8.** Correlación entre uso de categorías y los resultados en las tres evaluaciones. Los valores son significativos cuando, con el valor  $p < 0,05$ , el número de casos válidos es de 119. El curso de Dinámica de Sistemas no usó la categoría información

	Treinta	Sesenta	Examen final
Solución 1	0,20	0,35	-0,10
Propuesta 1	0,23	0,14	-0,10
Pregunta 1	0,12	0,16	0,01
Fórmula 1	0,15	0,03	0,07
Explicación 1	0,24	0,14	-0,03
Información 1	0,26	0,26	-0,00
Solución 2	0,08	0,06	-0,03
Propuesta 2	0,23	0,13	0,12
Pregunta 2	-0,05	0,11	0,19
Fórmula 2	0,15	0,02	0,10
Explicación 2	-0,08	-0,04	0,09
Información 2	0,27	-0,07	-0,25
Solución 3	0,17	0,10	0,11
Propuesta 3	0,09	0,22	0,00
Pregunta 3	-0,01	0,08	0,09
Fórmula 3	0,06	0,07	0,03
Explicación 3	0,07	0,14	0,08
Información 3	0,36	0,20	-0,13

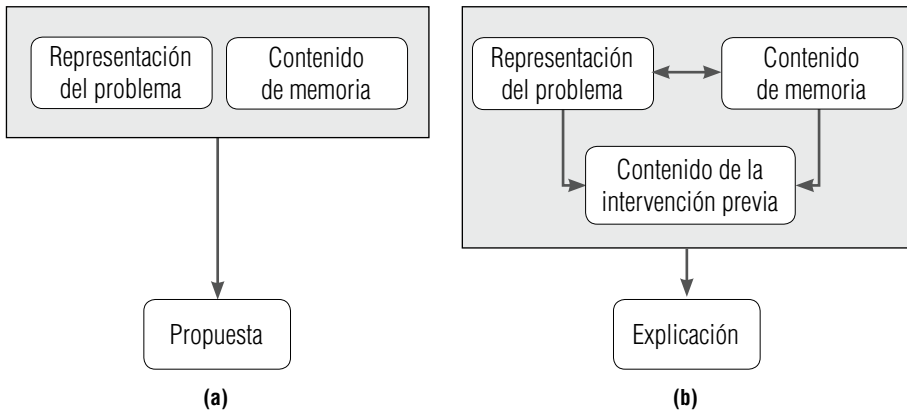
La tabla 8 muestra la correlación entre el uso de categorías y los resultados en las evaluaciones. En conjunto, el desarrollo del primer caso es el que más impacto tiene en los resultados de las evaluaciones. El de menor efecto es el tercer caso. El uso de “información” y la presentación de “propuestas” aparecen como las categorías más influyentes en el aprendizaje.



## Discusión y conclusiones

### Uso de categorías ontológicas

En la solución de problemas de forma verbal utilizando categorías ontológicas, se presentan los casos extremos en la frecuencia de uso, por ejemplo “propuesta” tiene una frecuencia alta de uso y explicación tiene una frecuencia muy baja de uso. Una explicación que se puede dar a este hecho es la diferencia en el peso cognitivo en el uso de cada una de éstas. Para la elaboración de una propuesta, es suficiente que el estudiante tenga la representación mental del caso, mientras que para la elaboración de una explicación el estudiante debe tener la representación mental del caso, la intervención propia o de otro compañero, la cual se va a explicar y el conocimiento que se utilizará para tal fin (figura 2).



**Figura 2.** Representación de los procesos mentales para generar las participaciones Propuesta y Explicación

De los resultados encontrados se tiene que la frecuencia de uso de categorías ontológicas depende del curso y más exactamente del dominio de conocimiento y del tipo de problema, sin embargo se hace necesario diseñar un sistema de monitoreo que esté orientado a dinamizar el uso de las categorías de menor frecuencia de uso, e incluso a revisar la definición de las categorías con el fin de lograr disminuir el solapamiento entre ellas y reducir las en número para evitar la sobrecarga cognitiva.

### Análisis relacional

En la red social planteada por el ambiente Argonaut cada estudiante se puede comunicar con sus compañeros a partir de tres relaciones: conexión neutra, apoyo y oposición. En este sentido se pueden identificar en un mapa argumentativo tres subredes: red de conexiones neutras, red de conexiones de oposición y red de conexiones de apoyo. El significado de cada una de ellas es

diferente. En la primera (enlaces negros), las conexiones se hacen para enlazar ideas sin la intención particular de apoyarlas u oponerse a ellas. En la segunda (flechas verdes), la intencionalidad es la de apoyar una idea previa, de manera que el sentido de la flechas es fundamental y por esto se requiere distinguir entre número de enlaces de entrada, o lo que se conoce en el Análisis de Redes Sociales (ARS) como grado de entrada, y el grado de salida, pues el papel que ellos juegan dentro de la red es distinto. En la tercera (flechas rojas), hay una intención de oposición; se manifiesta explícitamente el no estar de acuerdo con las ideas expuestas por otros. En el análisis que se hizo se encontró que los estudiantes son más dados a generar relaciones de comunicación de tipo neutro, es decir, no se comprometen ni apoyando, ni contravirtiendo una intervención previa de un compañero. Al igual que en el uso de categorías ontológicas, en este punto se hace necesario del diseño de un monitoreo cuya intención u objetivo es activar el uso de relaciones tanto de apoyo como de oposición, para incentivar los procesos argumentativos que soporten la posición individual en contra o a favor de algún planteamiento. Una interpretación plausible considera que cuando el nivel de construcción de conocimiento está en sus primeras etapas de maduración, la sensación subjetiva de seguridad es baja y por tanto no se tiene la capacidad de generar posiciones críticas frente a sus pares. En el modelo pedagógico usado en el proyecto, el proceso argumentativo tiene el carácter de exploración de la solución del problema y es seguido por un proceso de representación algebraica, otro de diagramación y uno de simulación computacional. Es muy probable que en etapas más avanzadas, la caracterización de las participaciones con base en el uso de relaciones y de categorías fuera diferente o que si se cambia el orden de las representaciones suceda algo similar.

### **Análisis de clúster**

En el análisis de clúster se identificaron los núcleos de construcción colaborativa de conocimiento. En los cuatro grupos que participaron en la experiencia se pueden identificar regularidades que permiten determinar momentos en la solución verbal de un caso relacionado con el modelamiento matemático. En el momento 1 se hace una discusión para tener una representación compartida del problema, como producto de este momento se tiene la identificación de datos y variables que intervienen en el problema. En el momento 2, los estudiantes plantean casos particulares del caso para identificar relaciones entre las variables. Como producto de este momento se tiene la propuesta de un modelo. En el momento 3, el final del proceso de solución del caso, la discusión se hace alrededor del modelo planteado como solución, sobre la validez, alcances y limitaciones del mismo. Como producto de este momento se tiene un modelo más depurado y la prueba del mismo.

## Análisis estadístico

El análisis de regresión realizado muestra que la sesión de trabajo que más incide en el desempeño académico es la primera, esta tiene un efecto significativo tanto en la nota del segundo como del tercer corte del semestre (tabla 9). Una posible explicación al fenómeno puede ser la relación que existe entre los temas aplicados en el primer caso y los desarrollados tanto en el segundo como tercer corte.

**Tabla 9.** Relaciones significativas a lo largo del proceso

	Treinta	Sesenta	Examen final
Explicación 1	0,077132		
Total 1		0,000302	0,005575
Propuesta 2		0,036438	
Curso	0,000005		0,000001

Las categorías que muestran una relación significativa entre la frecuencia de su uso y el desempeño académico son “explicación” y “propuesta”. Esto hecho sugiere que en este tipo de ambientes de aprendizaje se deben implementar estrategias que dinamicen el uso de las mismas. Otra variable que incide significativamente en el desempeño académico es el curso; este hecho posiblemente también tenga que ver con el dominio de conocimiento que se desarrolla en cada uno de los cursos.

## Referencias

- Alberts, S., Garstka, R., Hayes, R. y Signori, D. (2001). *Understanding Information Age Warfare*, Command and Control Research Program (CCRP) Publication.
- Clark, H. H. (2002). Conversation, Structure of. En L. Nadel (ed.). *Encyclopedia of Cognitive Science*. Basingstoke, England: MacMillan.
- Collins, A., Brown S. y Newman S. E. (1989). Cognitive apprenticeship: Teaching the crafts of reading, writing and mathematics. En L. B. Resnick (ed.), *Knowing, Learning and Instruction: Essays in the honor of Robert Glaser*.
- Dillenbourg, P. (1999). *Collaborative Learning: Cognitive and Computational Approaches*. Advances in Learning and Instruction Series. New York, NY: Elsevier Science, Inc.

- Dillenbourg, P., Schneider, D. y Synteta, V. (2002) *Virtual Learning Environments*, Proceedings of the 3rd Congress on ICT in education, Rhodes. Greece: Kastaniotis Editions.
- Gruber, T. (1993). *Toward Principles for the Design of Ontologies Used for Knowledge. Sharing*, International Workshop on Formal Ontology in Conceptual Analysis and Knowledge Representation, Padova, LAD-SEB-CNR Int. Rep. 01/93. Hillsdale. N.: Lawrence Erlbaum Associates.
- Guarino, N. (1992). *Concepts, Attributes and Arbitrary Relations: Some Linguistic and Ontological Criteria for Structuring Knowledge Bases*. *Data y Knowledge Engineering*, 8: 249-261.
- Guarino, N. (1998). *Formal Ontology in Information Systems*. Proceedings of FOIS'98. Trento, Italy. Amsterdam: IOC Press, pp. 3-15.
- Jonassen, D. H. (2006). *Modeling with Technology: Mindtools for Conceptual Change*. Columbus, Ohio: Pearson Prentice Hall.
- Maldonado, L. F. (2013). *La espiral del modelamiento y la formación de esta competencia con apoyo de ambientes digitales*. Sexto Encuentro Nacional y Segundo Regional de Experiencias Curriculares y de Aula en Educación en Tecnología e Informática: la Transversalidad e Interdisciplinariedad de la Tecnología. Pasto, Colombia.
- Noble, D. y Letsky, M. (2005). *Cognitive-Based Metrics to Evaluate Collaboration Effectiveness*. *Defense Technical Information Center*, pp. 1-14.
- Weggeman, M. (1997). *Kennismanagement. Inrichting en besturing van kennisintensieveorganisaties*. Scriptium, Schiedam.

## Capítulo 6



# La representación algebraica en la formación de competencias de modelamiento matemático

Jaime Ibáñez Ibáñez\*

Miguel A. Pachón Higuera\*\*

Orlando Muñoz\*\*\*

### Introducción

A continuación describimos la experiencia del proceso de modelación matemática con estudiantes de ingeniería, a partir de la presentación de casos en los cuales se requiere modelar algebraicamente la situación presentada para encontrarle una solución. Como apoyo al proceso se utilizó el programa Derive, con el cual los estudiantes plasmaban la representación algebraica del caso y desarrollan el proceso de solución. Se presenta también una conceptualización sobre la modelación matemática y los resultados de la experiencia.

### Antecedentes

#### Importancia de los modelos matemáticos

Se concibe como modelo matemático a la representación de algún aspecto de la realidad por medio de expresiones algebraicas. Típicamente se consideran los

---

\* M. Sc. y profesor investigador de la Universidad Pedagógica Nacional. Grupo de investigación Cognitek. Correo electrónico: jaime78@yahoo.com

\*\* M. Sc. y profesor investigador de la Universidad Central. Grupo de investigación Tecnimat. Correo electrónico: mpachonh@ucentral.edu.co

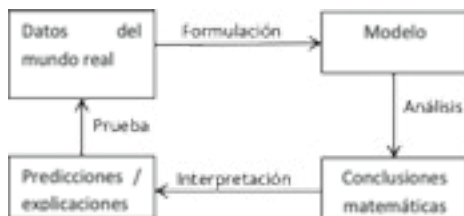
\*\*\* Ingeniero y profesor investigador de la Universitaria de Investigación y Desarrollo (UDI). Grupo de investigación Gidsaw. Correo electrónico: orlandomunoz9357@gmail.com

elementos de la realidad modelada y sus relaciones. Un modelo matemático es la simplificación por medio de expresiones matemáticas de un objeto o fenómeno de la realidad, externo al campo de las matemáticas, lo cual significa describir en lenguaje matemático una realidad que existe en un mundo no matemático.

La riqueza de un modelo, ya sea en economía, o en cualquier rama de las ciencias, radica en la posibilidad de estudiar teóricamente fenómenos de cualquier índole, ya sean factibles o no de ser recreados en laboratorio para su estudio. El éxito del modelo radica en la exactitud con la cual se pueda representar el objeto o fenómeno que se estudia.

Para Gerda de Vries, (2001), la modelación matemática es el uso de las matemáticas para describir fenómenos del mundo real, con el fin de inquirir aspectos importantes, explicar fenómenos relacionados, probar ideas, o hacer predicciones. En consecuencia, le permite a las disciplinas como ingeniería, física, fisiología, ecología, etc. tener un mejor conocimiento de su objeto de estudio. En vez de realizar prácticas en el mundo real, un experto puede llevar a cabo comprobaciones con representaciones matemáticas; se parte de datos para la formulación del modelo, el cual se analiza para establecer conclusiones matemáticas, las cuales se interpretan mediante predicciones que se prueban con datos reales (figura 1). Con la recolección de datos se busca la información relevante y fundamental para entender el problema. Se identifican variables, constantes y relaciones entre ellas, como insumos para la formulación del modelo.

Neumaier (2003), plantea que para la formulación se debe comenzar con modelos simples, para ir agregando los datos que se consideren necesarios. Se inicia con la identificación de las variables, las constantes y las relaciones importantes que se descubran entre ellas. Esto permite conectarlas mediante operadores matemáticos para establecer ecuaciones, desigualdades, funciones, matrices o series de números, e ir agregando elementos de tal forma que se logre describir matemáticamente el objeto a modelar.



**Figura 1.** Proceso de elaboración de modelos matemáticos de Gerda de Vries, (2001)

Regalado, Peralta y González (2008), consideran tres formas de llegar a un modelo matemático: la primera, utilizar una teoría aceptada por la ciencia sobre el objeto a representar; la segunda, construir las expresiones algebraicas a partir de la observación directa de los fenómenos que se modelan; y la ter-

cera, utilizar ecuaciones que describan un sistema análogo para derivar de ellas expresiones algebraicas.

Una vez elaborado el modelo matemático, este se somete a un análisis riguroso, para establecer las condiciones en que funciona. En este proceso es importante determinar los límites y restricciones tanto de tipo cualitativo como cuantitativo, para evitar interpretaciones inadecuadas (Neumaier, 2003). Para perfeccionar el modelo, es importante analizar los signos de variables, constantes y datos, e identificar casos extremos. Esto ayuda, no solo a descubrir casos interesantes, sino también a detectar errores.

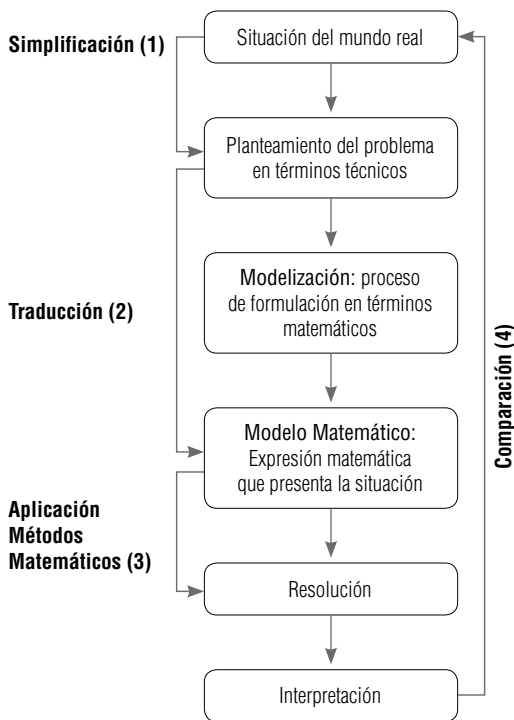
La aplicación del modelo en datos reales permite establecer conclusiones matemáticas, es decir, resultados en lenguaje matemático. Esto conduce a la comprensión amplia del fenómeno que se estudia y a hacer predicciones sobre su comportamiento futuro. Estos resultados se validan comparándolos nuevamente con datos reales, con lo cual se pone a prueba el modelo.

### **Modelación matemática y la solución de problemas**

La construcción de un modelo matemático para la solución de un problema implica la transferencia del conocimiento matemático a los contextos planteados en los enunciados. Camarena (2009) plantea que la matemática en ingeniería es un lenguaje, ya que casi todo lo que se dice en esta área se representa con la simbología matemática. De ahí la importancia de formar a los estudiantes en la solución de problemas con habilidades para un mejor desempeño profesional mediante el uso de las posibilidades de la matemática. Camarena también señala tres momentos en la modelación matemática: identificar variables y constantes del problema, establecer relaciones y validar la relación matemática que modela al problema. Esto implica extraer del contexto del problema los conceptos que explícita o implícitamente intervienen en el problema, las características del problema que varían y las que son constantes; identificar los datos iniciales o conocidos del problema y los desconocidos o los interrogantes, que constituyen la solución al problema. Además, establecer relaciones entre los conceptos involucrados en el problema constituye la base para construir o identificar los modelos matemáticos, que se expresan mediante fórmulas o expresiones algebraicas

Una vez identificados los datos, las variables, los interrogantes y los modelos o fórmulas que debe usar, el estudiante debe dar una serie de pasos u operadores para pasar del estado inicial del problema al estado final para encontrar las soluciones respectivas. El tercer momento al que se refiere Camarena (2009), implica volver a los datos e incógnitas para verificarlos.

López Gómez (2012), basado en Gómez (2002) García-Raffi (2004) y Sánchez et ál. (1999), expresan que la modelación matemática se puede aplicar en el aula bajo un esquema relativamente sencillo. Se parte de un caso



**Figura 2.** Proceso para la didáctica de la modelación matemática (López Gómez, 2012)

real, en un contexto y se realiza un proceso de simplificación basado en la ciencia a la cual se hace referencia (física, química, biología, ciencias sociales). Se conduce el planteamiento del caso en términos matemáticos y se culmina con la formulación del modelo (en términos de ecuaciones, formas geométricas, desigualdades, etc.) que describe de la forma más real posible el problema en cuestión. Según López Gómez (2012), el paso siguiente y más importante es la resolución del problema matemático. Luego se procede a la interpretación con base en casos reales, con el fin de validar su capacidad predictiva.

## Metodología

### Formulación de los casos

Como se mencionó antes, los estudiantes trabajaron de forma colaborativa en el abordaje de casos, los cuales consisten en una situación de contexto, y una pregunta final cuya resolución requería un proceso de modelamiento matemático, conformado por expresiones algebraicas, ecuaciones simples o ecuaciones diferenciales. Los casos se entregan a los estudiantes con anticipación a la sesión de trabajo (figura 3), mediante documentos con la siguiente estructura:

- Información general de la actividad. En esta sección del documento se especifican los detalles más generales del caso: nombre del caso, asignatura en la que se aplica el caso, temática del contenido programático de



la asignatura que está relacionada con el caso, fecha de la sesión y duración estimada de la misma.

- Competencias que se espera que el estudiante desarrolle. Se listan las competencias mínimas que se espera que los estudiantes adquieran mediante el desarrollo del caso durante la sesión.
- Plan de trabajo. Se describen los momentos en los que se divide la sesión y la duración de cada uno; a saber:
  - Primer momento. Lectura del planteamiento del caso
  - Segundo momento. Desarrollo del caso utilizando el software MatLab
  - Tercer momento. Revisión del proceso y solución del caso por parte del docente
  - Cuarto momento. Autoevaluación (logros, dificultades, sugerencias y conclusión)
  - Quinto momento. Transferencia a otros contextos del problema
- Contexto del caso de aplicación. Se describe la situación de la vida cotidiana en la que se enmarca el problema que debe solucionarse en el caso.

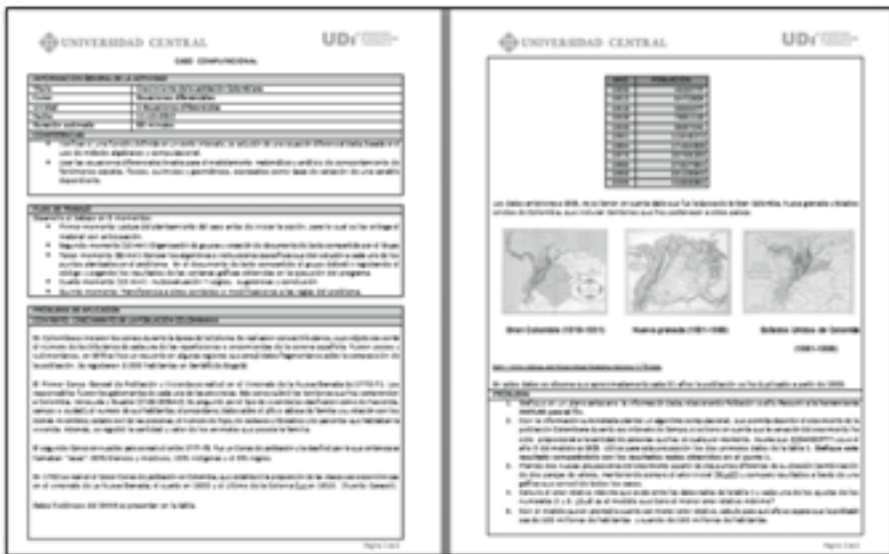


Figura 3. Ejemplo de caso presentado a los estudiantes

- **Problema.** Se enuncia la particularidad en la que el caso tiene lugar, así como las preguntas que deben ser contestadas por el estudiante.
- **Información adicional.** Se ofrece información adicional sobre el contexto del problema, que es útil para la solución del problema propuesto.
- **Transferencia de la solución.** Se listan uno o más cuestionamientos referentes a la temática del caso. Estos pretenden que el estudiante analice cómo la solución o simulación desarrollada en la sesión podría usarse en otros contextos de aplicación.
- **Solución propuesta.** Se plantea la solución computacional que el docente propone para el problema.

### Plantilla de análisis

En el proceso de solución del caso el estudiante debe identificar datos y variables, encontrar el modelo matemático apropiado, confrontar los datos que suministra el modelo con los datos reales e interpretar los resultados. Para el análisis de las soluciones de los casos presentados por los estudiantes se tuvieron en cuenta las siguientes variables:

- *Variables identificadas.* Corresponde al número de variables que intervienen en el problema y que los estudiantes identificaron.
- *Número de datos identificados.* Corresponde a los datos que se proporcionan en el problema y que los estudiantes identificaron correctamente.
- *Fórmulas usadas correctamente.* Corresponde a las fórmulas que los estudiantes usaron en forma adecuada para la solución del problema.
- *Preguntas identificadas.* Corresponde a los interrogantes que, de acuerdo con el enunciado del problema, el estudiante identificó y debe responder.
- *Pasos correctos.* Esta variable indica el número de pasos que el estudiante dio y que constituyen un avance en la reducción del espacio del problema o que conducen a la solución del mismo.
- *Soluciones encontradas.* Indica el número de respuestas correctas.
- *Eventos correctos.* Son las variables identificadas más el número de datos identificados, las fórmulas usadas correctamente, las preguntas identificadas, los pasos correctos y las soluciones encontradas.
- *Total eventos.* Comprende el total de variables intervinientes, el número de datos dados en la formulación del problema, las fórmulas requeridas

para la solución, el número de preguntas enunciadas, los pasos requeridos y el número de soluciones que se deben encontrar.

- *Eficacia*. Es el índice de desempeño del estudiante. Se calcula a partir del cociente entre la suma de los anteriores indicadores y el total de eventos que se requieren para la solución del problema (a juicio del experto o docente). Se calcula a partir de la siguiente fórmula:  $Eficacia = \text{eventos correctos} / \text{total de eventos}$ .

Respecto al logro académico se tuvieron en cuenta las notas del primer y del segundo treinta por ciento, el promedio de las anteriores, la nota del examen final –que tiene un peso del cuarenta por ciento– y la nota definitiva. Estas variables fueron correlacionadas entre sí, para determinar la posible relación entre ellas. Aunque esto no implica una relación de causa-efecto, esto puede suponerse dependiendo del orden de las variables comparadas.

## **Ejecución de los casos en la Universidad Central**

En las sesiones de trabajo los estudiantes contaban con herramientas informáticas para realizar su trabajo. En los cursos de la Universidad Central se utilizó el software Derive, que ofrece opciones de edición de expresiones matemáticas y de resolución de las mismas.

### ***Matemáticas III***

En la asignatura de Matemáticas III, correspondiente a Ecuaciones Diferenciales, se tomaron dos grupos experimentales, cada uno con un profesor diferente. Estos grupos trabajaron con base en dos casos, denominados “Población colombiana” y “Salto con Bungee Jumping”, respectivamente.

- *Caso “Población colombiana”*

Jornada diurna. Todos los estudiantes identificaron las variables y los datos del caso. En términos generales los estudiantes plantearon una ecuación diferencial y encontraron la solución general por el método de separación de variables. Para encontrar la solución particular, utilizaron tres de los dieciocho datos para construir un sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas para hallar las constantes M, K y C, y así obtener una fórmula de la población colombiana en función del tiempo. Sin embargo, no verificaron si el modelo obtenido representaba de alguna manera a la población colombiana; solo encontraron la solución de la ecuación diferencial y no interpretaron el resultado. Únicamente un estudiante comparó el modelo con datos reales e interpretó los resultados, obteniendo así una solución a la pregunta planteada.

Jornada nocturna. Todos los estudiantes identificaron las variables y los datos del caso. En términos generales los estudiantes utilizaron tres de los dieciocho datos para construir, a partir de la solución de la ecuación diferencial, un sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas para encontrar las constantes  $M$ ,  $K$  y  $C$  y así obtener una fórmula de la población colombiana en función del tiempo. A diferencia del grupo de la jornada diurna, los estudiantes encontraron la solución de la ecuación diferencial sin utilizar Derive; las constantes  $M$ ,  $K$  y  $C$  las obtuvieron resolviendo ecuaciones con la herramienta algebraica Derive y verificaron si el modelo obtenido representaba de alguna manera la población comprobando algunos datos dados inicialmente.

- *Caso “Salto con Bungee Jumping”*

Jornada diurna. El 100% de los estudiantes logró identificar las variables y los datos del problema, así como el modelo matemático con las mismas características que un sistema de resorte-masa sin fuerza exterior que actúa sobre el sistema y la ecuación diferencial lineal homogénea y de segundo orden. El 33% de los estudiantes aplicó la ecuación característica para encontrar la solución general. El 19% de los estudiantes utilizó los datos iniciales para encontrar la solución del problema con valores iniciales; sin embargo, todas las respuestas tienen un error en la interpretación de un dato inicial. El 38% de los estudiantes graficó la solución de la ecuación diferencial y resolvió dos de las preguntas planteadas. El 10% de los estudiantes no logró resolver la ecuación diferencial.

Jornada nocturna. Todos los estudiantes identificaron las variables, los datos del problema y el modelo matemático con las mismas características que un sistema de resorte-masa sin fuerza exterior que actúa sobre el sistema e identificaron la ecuación diferencial como lineal homogénea y de segundo orden. El 36% de los estudiantes aplicó la ecuación característica para encontrar la solución general. El 36% de los estudiantes utilizó los datos iniciales para encontrar la solución del problema con valores iniciales. El 28% de los estudiantes no logró resolver la ecuación diferencial. Ningún estudiante graficó la solución ni interpretó los resultados para contestar las preguntas planteadas.

La tabla 1 muestra un resumen de las diferentes correlaciones entre los componentes de la plantilla de evaluación y las notas obtenidas por los estudiantes en los tres cortes del semestre. En cada celda se muestran los valores correspondientes a los casos 1 y 2, junto con el total de los dos casos. Solo se muestran los valores de correlación que pueden tener alguna interpretación. Algunos de los espacios que aparecen en blanco corresponden a los aspectos en los cuales no se presentó variación.

Con respecto a las notas, la tabla muestra valores de correlaciones fuertes entre la nota alcanzada en el examen final con las variables “Pasos correctos”,

**Tabla 1.** Valores de la probabilidad de error ( $p$ ) resaltando los valores de  $p < 0.05$ , para los casos 1 y 2, y para el total que se obtienen al juntar los dos casos, en el curso de Matemáticas III de la Universidad Central

MATEMÁTICAS	Casos	Nota definitiva	Examen (40%)	Promedio al 60%	Segundo 30%	Primer 30%	VARIABLES identificadas	Datos identificados	Fórmulas usadas correctamente	PREGUNTAS identificadas	PASOS correctos
Variables identificadas	Caso 1	0,841	0,221	0,456	0,755	0,310					
	Caso 2	0,736	0,814	0,707	0,522	0,919					
	Total	0,770	0,372	0,704	0,948	0,423					
Datos identificados	Caso 1	0,324	0,787	0,181	0,453	0,110	0,796				
	Caso 2										
Fórmulas usadas correctamente	Total	0,346	0,849	0,146	0,445	0,068	0,764				
	Caso 1	0,881	0,671	0,893	0,926	0,887	0,597	0,939			
	Caso 2	0,962	0,731	0,793	0,774	0,882	0,000				
Preguntas identificadas	Total	0,620	0,389	1,000	0,951	0,940	0,033	0,154			
	Caso 1										
	Caso 2	0,853	0,271	0,141	0,337	0,084	0,434		0,251		
Pasos correctos	Total	0,509	0,446	0,049	0,114	0,080	0,128	0,780	0,154		
	Caso 1	0,565	0,110	0,640	0,974	0,408	0,000	0,026	0,028		
	Caso 2	0,152	0,011	0,924	0,576	0,567	0,021		0,079	0,000	
Soluciones encontradas	Total	0,173	0,014	1,000	0,721	0,663	0,001	0,108	0,064	0,001	
	Caso 1										
	Caso 2	0,413	0,055	0,677	0,858	0,538	0,004		0,024	0,000	0,000
Eficacia	Total	0,369	0,043	0,692	0,820	0,637	0,066	0,933	0,046	0,000	0,000
	Caso 1	0,478	0,156	0,916	0,981	0,824					
	Caso 2	0,374	0,047	0,725	0,959	0,424					
Total	0,266	0,043	0,970	0,867	0,782						

Fuente: elaboración propia.

**Tabla 2.** Valores de la probabilidad de error ( $p$ ) resaltando los valores de  $p < 0,05$ , para los casos 1 y 2, y para el total que se obtiene al juntar los dos casos, en el curso de Modelamiento y Simulación de la Universidad Central

MODELAMIENTO Y SIMULACIÓN	Casos	Definitiva	Examen (40%)	Promedio al 60%	Segundo 30%	Primer 30%	Variables identificadas	Datos identificados	Fórmulas usadas correctamente	Preguntas identificadas	Pasos correctos
Variables Identificadas	Caso 1	0,010	0,117	0,082	0,074	0,653					
	Caso 2	0,410	0,458	0,594	0,527	0,001					
	Total	0,096	0,765	0,053	0,545	0,000					
Datos identificados	Caso 1	0,007	0,211	0,031	0,030	0,559	0,000				
	Caso 2	0,584	0,682	0,254	0,662	0,082	0,001				
	Total	0,148	0,631	0,011	0,136	0,013	0,004				
Fórmulas usadas correctamente	Caso 1	0,063	0,228	0,191	0,528	0,088	0,001	0,000			
	Caso 2	0,257	0,849	0,062	0,155	0,266	0,187	0,083			
	Total	0,015	0,635	0,005	0,088	0,012	0,046	0,075			
Preguntas identificadas	Caso 1	0,224	0,311	0,475	0,198	0,427	0,000	0,003	0,218		
	Caso 2	0,208	0,860	0,038	0,133	0,184	0,177	0,076	0,000		
	Total	0,845	0,358	0,625	0,925	0,188	0,462	0,435	0,083		
Pasos correctos	Caso 1	0,085	0,255	0,227	0,705	0,038	0,005	0,004	0,000	0,560	
	Caso 2	0,323	0,705	0,068	0,181	0,230	0,099	0,027	0,000	0,000	
	Total	0,065	0,903	0,015	0,170	0,012	0,070	0,137	0,000	0,013	
Soluciones encontradas	Caso 1	0,030	0,289	0,073	0,323	0,042	0,011	0,001	0,000	0,868	0,000
	Caso 2	0,257	0,849	0,062	0,155	0,266	0,138	0,050	0,005	0,000	0,000
	Total	0,026	0,596	0,014	0,133	0,025	0,075	0,179	0,000	0,036	0,000
Eficacia	Caso 1	0,098	0,412	0,160	0,596	0,026					
	Caso 2	0,253	0,456	0,020	0,176	0,018					
	Total	0,094	0,904	0,014	0,214	0,003					

Fuente: elaboración propia.

“Soluciones encontradas” y “Eficacia”, en el caso 2 y en total que hace referencia a la suma de los dos casos. El puntaje en identificación de variables, presenta valores significativos de correlación con fórmulas usadas correctamente, pasos correctos y soluciones encontradas, en todos los casos. Las variables datos identificados correlaciona con pasos correctos en el primer caso. Formulas usadas correctamente correlacionan positivamente con los pasos correctos en el caso 1 y las soluciones encontradas en el caso 2 y el total. Preguntas identificadas correlaciona positivamente con los pasos correctos para el caso 2 y total y con las soluciones encontradas para el caso 2 y total.

Finalmente se observa en la tabla que la variable pasos correctos correlaciona fuertemente con soluciones encontradas.

### ***Modelamiento y simulación***

En esta asignatura participó un grupo experimental. Se trabajó con base en dos casos denominados “Población Colombiana” y “Semáforo”.

En la tabla 2 se observa una correlación significativa entre la nota definitiva del curso de modelación con Variables Identificadas para el caso 1, Datos identificados para el caso 1, Formulas usadas Correctamente para el total, Soluciones encontradas (caso 1 y total).

El promedio del 60% muestra valores de correlación significativos con Variables Identificadas para el total, con Datos identificados para el caso 1 y total, con fórmulas usadas correctamente para el total, preguntas identificadas para el caso 2, con pasos correctos para el total, Soluciones encontradas para total y Eficacia para el caso 2 y total.

La nota del segundo 30% muestra valores de correlación significativos con datos identificados para el caso 1. La nota del primer 30% muestra valores de correlación significativos con Variables Identificadas en el caso 2 y total, datos identificados en el total, formulas usadas correctamente para el total, pasos correctos para el caso 1 y total, con soluciones encontradas para el caso 1 y total y con eficacia en todos.

El número de variables identificadas correlaciona con Datos identificados (todos), Formulas usadas Correctamente en el caso 1 y el total, Preguntas identificadas para el caso 1, Pasos correctos para el caso 1, Soluciones encontradas en el caso 1.

El número de datos identificados correlaciona con fórmulas usadas correctamente en el caso 1, con preguntas identificadas en el caso 1, con pasos correctos para los casos 1 y 2, con soluciones encontradas para los casos 1 y 2.

El uso de fórmulas adecuadas correlaciona con preguntas identificadas (casos 1), pasos correctos (todos), soluciones encontradas (todos).

## Ejecución de los casos en la Universitaria de Investigación y Desarrollo

En el curso de Matemáticas III se utilizó como software de soporte Derive. Para Dinámica de Sistemas, que es el curso que corresponde a Modelamiento y Simulación en la UDI, se utilizó la plataforma de trabajo Google Drive.

### Matemáticas III

Se trabajaron exactamente los mismos casos de la Universidad Central: “Población colombiana” y “Bungee Jumping”. La tabla 3 muestra los valores  $-p$  para las correlaciones entre las variables independientes y las notas obtenidas por los estudiantes en cada uno de los exámenes parciales a lo largo del semestre. Aunque ninguno de los valores alcanza el nivel de significancia que se suele tener como referencia ( $p < 0,05$ ), sí hay una tendencia consistente a una correlación más significativa con las notas del parcial 3, cuyos valores  $-p$  son todos menores en comparación con los dos parciales anteriores.

**Tabla 3.** Valores de la probabilidad de error ( $p$ ), para los casos 1 y 2, y para el total que se obtienen al juntar los dos casos, en el curso de Matemáticas III de la Universitaria de Investigación y Desarrollo (UDI)

Matemáticas III UDI		Nota Parcial 1	Nota Parcial 2	Nota Parcial 3
Variables identificadas	Caso 1	0,637	0,957	0,187
	Caso 2	0,615	0,473	0,148
	Total	0,556	0,666	0,091
Datos identificados	Caso 1	0,555	0,902	0,177
	Caso 2	0,693	0,546	0,129
	Total	0,601	0,630	0,082
Fórmulas identificadas	Caso 1	0,637	0,957	0,187
	Caso 2	0,802	0,278	0,265
	Total	0,651	0,532	0,126
Preguntas identificadas	Caso 1	0,518	0,873	0,180
	Caso 2	0,608	0,659	0,100
	Total	0,512	0,754	0,063
Pasos correctos	Caso 1	0,595	0,928	0,191
	Caso 2	0,608	0,659	0,100
	Total	0,547	0,731	0,069
Indicador de eficacia	Caso 1	0,595	0,928	0,191
	Caso 2	0,608	0,659	0,100
	Total	0,471	0,831	0,115

Fuente: elaboración propia.



## Dinámica de Sistemas

Se trabajaron dos casos denominados “Computación en la nube” y “Papel o plástico”.

**Tabla 4.** Valores de la probabilidad de error ( $p$ ), para los casos 1 y 2, y para el total que se obtienen al juntar los dos casos, en el curso de Dinámica de Sistemas de la Universitaria de Investigación y Desarrollo (UDI)

Dinámica de Sistemas UDI		Nota Parcial 1	Nota Parcial 2	Nota Parcial 3
Variables identificadas	Caso 1	0,087436109	0,773013977	0,00311529
	Caso 2	0,156255957	0,148017933	0,508922026
	Total	0,860214666	0,364835267	0,103207512
Datos identificados	Caso 1	0,713630027	0,345561502	0,532021213
	Caso 2	0,133188692	0,186009014	0,665390662
	Total	0,293606806	0,567663038	0,992515341
Fórmulas identificadas	Caso 1	0,987238916	0,086799646	0,215792137
	Caso 2	0,05376413	0,277589499	0,458767751
	Total	0,202305191	0,387071952	0,507455829
Indicador de eficacia	Caso 1	0,239675848	0,400405209	0,016252822
	Caso 2	0,121564794	0,17266877	0,521301211
	Total	0,828543127	0,726563151	0,155969068

**Fuente:** elaboración propia.

De forma similar a como sucedió con el curso de Matemáticas III en la UDI, en el caso de Dinámica de Sistemas solo “Variables identificadas” e “Indicador de eficacia” en el caso 1 presentan una correlación significativa al 95% ( $-p < 0,05$ ) con la nota del parcial 3. Para la suma de los casos, aunque el nivel de significancia no llega al 95%, es notoriamente mejor que con el resto de los elementos de la matriz.

## Conclusiones

En cuanto a lo observado en los análisis de datos de la Universidad Central, los resultados muestran claramente la importancia de comprender el enunciado del problema, lo que se ve reflejado en la correlación presentada entre la identificación del problema con las fórmulas usadas correctamente, los pasos correctos y las soluciones encontradas para el caso de matemáticas y con todas las demás variables, incluyendo la nota definitiva, para el caso del curso de modelamiento. Se aclara que con la eficacia no se calculó puesto que es uno de sus componentes.

Este hecho se ve reforzado por la correlación encontrada entre la identificación de los datos y los pasos correctos, en el curso de matemáticas, y con los datos identificados, las fórmulas usadas correctamente, las preguntas identificadas, los pasos correctos, las soluciones encontradas con las notas obtenidas.

Otra variable que es un indicio de la comprensión del problema es la identificación de las preguntas, variable que se correlaciona positivamente con los pasos correctos, las soluciones halladas y con las notas obtenidas, tanto en el curso de matemáticas como en el de modelación.

La identificación de variables, datos y preguntas se constituye en buen predictor del éxito en la solución del problema y, por consiguiente, en las notas alcanzadas, lo que muestra la importancia no solo de tener una comprensión lectora, sino también la importancia de la relación lenguaje-matemáticas.

En cuanto al proceso de solución se observa que el número de pasos correctos se correlaciona positivamente con las soluciones encontradas. También se muestra la importancia de encontrar el modelo matemático adecuado para tener éxito al encontrarse una correlación positiva entre las fórmulas usadas y las notas obtenidas, los pasos correctos y las soluciones encontradas.

Los resultados de la UDI muestran un impacto menor de la representación algebraica con los resultados de los parciales con respecto a los de la Universidad Central, aunque internamente muestran que la incidencia es mayor en la nota del tercer parcial que en los dos anteriores. A partir de esto se realizó una revisión crítica de los registros de la actividad y se encontró como factor importante que, a diferencia de la Universidad Central, en la UDI los estudiantes trabajaron en grupos y cada grupo generaba una respuesta unificada, sin que pudiera diferenciarse la participación de cada integrante. Dado que el número de estudiantes en la actividad de modelamiento algebraico fue bajo, especialmente en Matemáticas III, y que además trabajaron en grupo, no se consigue una variabilidad de datos para producir modelos estadísticos más significativos. Con respecto al curso de Dinámica de Sistemas, los casos de modelamiento algebraico fueron los más complejos del proyecto completo, lo cual es notorio en la gran diferencia entre los valores  $-p$ , comparando el caso 1 con el caso 2. A partir de esto, se recomienda observar una mayor gradualidad en el incremento de complejidad entre casos de modelamiento.

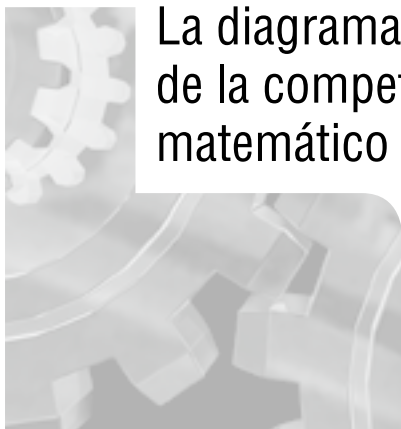
Los resultados muestran relaciones sistémicas entre las variables que son la base para que los docentes puedan orientar eficazmente la experiencia de representación algebraica. El sistema de variables es fundamental para organizar el seguimiento de los procesos de aprendizaje.

## Referencias

- Camarena G., P. (2009, enero-marzo). La matemática en el contexto de las ciencias. *Innovación Educativa*, 9(46): 15-25.
- Dennis G., Z. (2009). *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de Modelado*. 9.<sup>a</sup> ed.
- Himmelblau, D. M. y Bischoff, K. B. (2004). *Análisis y simulación de procesos*. Editorial Reverté S. A.
- López G., J. I. (2012). *Modelación matemática en la enseñanza de sistemas de ecuaciones lineales* [Tesis de grado]. Universidad de Veracruz.
- Regalado, A., Peralta, E. y González, C. A. (2008). Cómo hacer modelos matemáticos. *Temas de Ciencia y Tecnología*, 12(35): 9-18.
- Trigueros G., M. (2009, enero-marzo). El uso de la modelación en la enseñanza de las matemáticas. *Innovación Educativa*, 9(46): 75-87.



## Capítulo 7



### La diagramación en el desarrollo de la competencia de modelado matemático

Luis Facundo Maldonado Granados\*

Hugo Franco Triana\*\*

Nilson Genaro Valencia Vallejo\*\*\*

Ricardo Vicente Jaime Vivas\*\*\*\*

#### Introducción

Este capítulo presenta la diagramación en el contexto de solución de problemas como una forma de representar y modelar procesos. La revisión de estudios relacionados sirve de base para interpretar los resultados de la investigación desarrollada y así comprender la relación entre formas de representación y formación de la competencia de modelamiento. Los resultados muestran que la capacidad de diagramar se correlaciona positivamente con el aprendizaje en cursos de modelamiento matemático desde dos dimensiones: la conceptualización verbal de cada componente y la eficacia del diagrama en la solución del problema. Si bien hay un desarrollo de la competencia influido por el entorno computacional que apoya la actividad de diagramar, la instruc-

\* Ph. D. y profesor investigador de la Universidad Central. Grupo de investigación Tecnice. Correo electrónico: lmaldonadog1@ucentral.edu.co.

\*\* Ph. D. y profesor investigador de la Universidad Central. Grupo de investigación Complexus. Correo electrónico: hfrancot@ucentral.edu.co

\*\*\* M. Sc. y profesor investigador de la Universidad Pedagógica Nacional. Grupo de investigación Cognitek. Correo electrónico: nvalencia@pedagogica.edu.co

\*\*\*\* Ingeniero y profesor investigador de Universitaria de Investigación y Desarrollo. Grupo de investigación Gidsaw. Correo electrónico: ricardojaime@udi.edu.co

ción explícita sobre la mejor forma de elaborar diagramas parece un camino productivo que constituiría la capacidad de desarrollar esta representación como una estrategia de aprendizaje muy efectiva.

## Antecedentes

La solución de problemas es una capacidad intrínseca de todo sistema dotado de cognición, al punto de ser usada como indicador y medida de la inteligencia. Newell y Simon (1959) proponen un “solucionador general de problemas” el cual, mediante un algoritmo de búsqueda en un espacio de estados intermedios alcanzados mediante operaciones a partir del estado anterior, permitiría alcanzar la solución (estado objetivo) de cualquier problema matemático definido de manera simbólica.

En ese contexto, un “solucionador humano de problemas” (Newell, Shaw y Simon, 1958) consistiría en un sistema en el cual un agente humano, a partir de una representación en estructuras simbólicas, llevaría a cabo la búsqueda en el espacio de estados intermedios mediante operaciones escogidas apropiadamente para llevar al sistema a un estado de terminación exitosa. Dada la “explosión combinatoria” de estados intermedios posibles, el agente solucionador se ve obligado a adoptar una estrategia (inicialmente basada en una heurística definida a partir del objetivo del problema) para encontrar el camino más rápido al estado solución.

A partir de la propuesta de Newell y Simon (1972), Mayer (1983) propone un sistema de categorías para interpretar y formalizar el proceso de solución de problemas matemáticos desde la perspectiva del procesamiento de información, el cual consta de dos etapas:

- Traducción. En esta etapa intervienen los conocimientos de tipo lingüístico, semántico y esquemático.
- Solución. Se desarrolla a partir de la aplicación de los conocimientos de tipo operativo y estratégico.

Russell y Norvig (1995) proponen una formalización de la solución de problemas, en el contexto de la Inteligencia Artificial, basado en la toma de decisiones de agentes inteligentes para elegir la secuencia óptima de transformaciones del sistema (operaciones) en un espacio posible de estados. Así pues, la solución de un problema matemático consta de tres etapas según el sistema sobre el cual esté definido:

- Formular el objetivo.
- Formular el problema, en términos de estados y acciones, especificadas como operaciones que permiten al sistema pasar de un estado a otro.

- Encontrar la solución como un proceso de búsqueda en el espacio de estados, llevando a cabo un recorrido sobre los mismos mediante la elección correcta de operaciones que conducen el sistema al estado objetivo (solución).

Los procesos de solución de problemas, en particular en sus etapas de formulación del problema en sí, involucran la presentación de conocimiento relativo a los elementos del sistema y la caracterización de sus estados (mediante los posibles valores de las variables) y las transiciones entre los mismos (a manera de cambios de estado del sistema) que permiten formalizar el problema en sí y su proceso de solución. Esto implica el uso de diversas formas de representación de conocimiento, dentro de las cuales destacan, tanto por su utilidad didáctica como por su eficiencia para expresar elementos y relaciones, las representaciones gráficas que, a su vez, suponen un proceso de diagramación mediante lenguajes simbólicos más o menos rigurosos, dependiendo de su aplicación.

El proceso de diagramación conlleva el uso apropiado, implícito o explícito, de categorías sobre los procesos. Las estructuras más simples parten de la aplicación de conceptos muy básicos, como por ejemplo, los de nodo (elemento) y relación, de amplia aplicación. Por ejemplo, en un diagrama de conceptos cada nodo es un concepto y los arcos son vínculos entre aquellos. Algunos diagramas como, por ejemplo, los de Forrester o algunos de flujo incluyen categorías más elaboradas de nodos.

En un proceso de solución de problemas, identificar el sistema de variables puede ser el punto de partida para enfrentar la solución de un problema, la aplicación de operadores a las variables para generar cambios –procesamiento con entrada y salida–, la toma de decisiones frente a valores de las variables –estados posibles del sistema– y la identificación del estado solución, son ejemplos de esas categorías. Cada una de ellas se puede representar mediante figuras geométricas –p. ej., cajas como contenedores de información– y al aplicarlas obtenemos la caracterización del proceso de solución de un problema. En consecuencia, al hacer un diagrama se hace una metarrepresentación.

La función de la diagramación es la de tener una visión estructurada de la solución de un problema como un nivel superior al mismo proceso de solución. El hecho de resolver un problema no implica este nivel metaanalítico del proceso. Al diagramar el proceso se tiene conciencia de la lógica seguida y se cuenta con una base para comparar la solución particular con la de otros problemas. Los programadores han encontrado de gran utilidad estos diagramas para desarrollar la representación computacional del problema y la consecuente simulación mediante la cual se desarrollan escenarios posibles.

La matemática es intrínsecamente representacional tanto en su intención como en sus métodos (Kaput, 1989). Vergnaud (1997) sugiere ver la represen-

tación como un atributo de los conceptos matemáticos que son definidos por tres variables: la situación que hace al concepto significativo y útil, la operación que se puede desarrollar para manejar la situación y el conjunto de símbolos, expresiones lingüísticas y gráficas que se pueden usar para representar las situaciones y los procedimientos.

Estas teorías también sugieren que el proceso de concepción (simplemente seguir o ejecutar los pasos mostrados por el profesor) es menos abstracto que la concepción de un objeto (la naturaleza del concepto con sus propiedades, reglas y comprensión de cómo y por qué funcionan las reglas). Así, el proceso de formación de un concepto matemático puede interpretarse como de un nivel de abstracción menor que su concepción como objeto matemático. Cuando los estudiantes necesitan reducir el nivel de abstracción es probable que no hayan logrado la comprensión del concepto.

La diagramación de los procesos actúa para reconocer las propiedades del proceso en un nivel superior de abstracción relacionado con la ejecución del proceso de solución. Desarrollar la diagramación como paso siguiente a la solución algebraica es, en consecuencia, una práctica con mucho significado pedagógico.

Anasuk y Beyranevand (2010) muestran que los estudiantes que eran capaces de reconocer estructuras y relaciones presentes en diferentes formas de representación tuvieron mayor capacidad de responder un test estandarizado y, por otra parte, muchos estudiantes con solvencia en el manejo de símbolos no mostraron comprensión ni de conceptos ni de procesos.

Además, Van Essen y Hamaker (1990) prueban que las representaciones gráficas que permiten representar y conectar piezas de información facilitan la conceptualización de la estructura del problema y consolidar una base para resolver tanto el problema particular como problemas similares. Larkin y Simon (1987) también presentan pruebas que permiten afirmar que los gráficos facilitan la organización de la información y ayudan a explicitar información implícita en la formulación del problema.

Por otro lado, Panasuk y Beyranevand (2010) demuestran que hay estudiantes que pueden desarrollar de manera fluida procedimientos algebraicos y que fallan al expresar su significado en diagramas, en un estudio que se pregunta por la influencia de diferentes formas de representar las dimensiones estructurales de los procedimientos matemáticos y el desarrollo de su habilidad para resolver problemas.

El uso de diagramas ha sido reconocido como una de las estrategias más positivas en el aprendizaje de las matemáticas (Hembree, 1992). Sin embargo aparece una discusión sobre el uso espontáneo de diagramas y el uso sistemático exigido en la actividad de aprendizaje por los profesores. Los estudiantes,



en la mayoría de las culturas, no muestran tendencia espontánea a usar diagramas y el uso espontáneo no siempre es efectivo. Uesaka, Manalo e Ichikawa (2007) discuten el tema y desarrollan una investigación en la que encuentran que la educación de los estudiantes de Nueva Zelanda, a diferencia de la de los estudiantes japoneses de educación básica, incluye entrenamiento sistemático en el uso de diagramas.

Los profesores japoneses usan diagramas como estrategia didáctica pero no entrenan a los estudiantes para que los usen en su aprendizaje y en la solución de los problemas de sus tareas escolares. Los estudiantes de Nueva Zelanda obtienen consistentemente mejores resultados en pruebas estandarizadas frente a sus pares japoneses.

Roth (2002) explica las dificultades que muestran los estudiantes para leer fórmulas matemáticas y gráficas, no tanto por concepciones equivocadas, sino por falta de familiaridad con el dominio de conocimiento y con las convenciones de uso de los signos. Cuando los lectores están familiarizados con los signos y símbolos gráficos, estos pueden suministrar un marco para organizar la información. Se requiere que quien resuelve un problema conozca y entienda el propósito matemático y las razones por las cuales se construyeron las convenciones y la forma como el contexto influye en la interpretación de los gráficos.

Según Narayanan, Suwa y Motoda (1995, citados en Valencia, Sanabria e Ibáñez, 2012) para operar sobre el razonamiento diagramático se requieren dos clases de información: la información visual y la información conceptual. La primera se obtiene de la representación gráfica o diagrama, e incluye la configuración espacial, la forma del modelo gráfico y sus elementos; la segunda proviene del conocimiento previo del aprendiz e incluye el conocimiento predictivo, traído para hacer inferencias acerca de la dinámica del modelo gráfico.

Para estas situaciones de razonamiento, los diagramas sirven como representaciones unificadas de información espacial, de tal forma que facilitan el reconocimiento del conocimiento relevante para dar solución al problema y soportan la representación mental de la configuración de los componentes del modelo sobre el cual se razona.

El razonamiento diagramático es la acción de razonar y solucionar problemas, utilizando diagramas o gráficos como representaciones externas. No obstante los diagramas o modelos gráficos son representaciones estáticas externas, el razonamiento con estos modelos puede incluir simulaciones mentales de comportamientos que cambien las configuraciones descritas en ellos, lo cual puede ser soportado por procesos cognitivos fundamentales (Narayanan et. ál., 1995).

## Enfoque metodológico

El proyecto “Red de Modelamiento y Representación formal en Matemáticas”, al cual nos referimos en este trabajo, tuvo entre sus objetivos el de llevar a cabo un análisis detallado del impacto del uso de los modos de representación formal (verbal, algebraico, diagramático y computacional) en el desarrollo de competencias de modelado matemático. Para esta labor, se hizo seguimiento del desempeño académico de estudiantes de ingeniería en cursos de Matemáticas III (cálculo diferencial), Modelado y Simulación y Dinámica de Sistemas, con los cuales se introdujo un sistema de formación que considera las cuatro formas de representación mencionadas en la secuencia: discusión argumentativa de un caso usando el *software* Argunaut, solución algebraica del mismo mediante el *software* Derive, diagramación del proceso de solución utilizando el *software* DIA y, finalmente, desarrollo de la solución en el ambiente MatLab.

Los cursos, de contenido esencialmente formal (matemático y computacional), relacionados con el desarrollo de habilidades y destrezas para la solución de problemas reales en ingeniería, son propicios para el tipo de estudio propuesto en el proyecto, dado que la aproximación a dichos problemas contempla un proceso de modelado matemático riguroso. La mayor parte de problemas de ingeniería con aplicaciones reales tiene una solución analítica (longitud del proceso de solución, complejidad de las relaciones entre variables), o inexistente (Gordon, 1999). En el contexto de la formación en competencias básicas, transversales a todos los campos de la ingeniería, se requiere, entonces que los futuros profesionales se formen en competencias para la solución de problemas (solución numérica a problemas mal condicionados, optimización, derivación e integración numéricas, análisis espectral en el dominio discreto, etc.). El cálculo numérico, en conjunción con otras áreas de las matemáticas y las ciencias de la computación, permite obtener soluciones aproximadas y, en particular, la reproducción de comportamientos complejos en sistemas de interés (simulación), componente fundamental de los procesos de diseño, optimización y validación de herramientas y procesos en ingeniería (Wang y Shang, 2007).

Cabe agregar que el cálculo numérico se facilita con el uso de herramientas computacionales que permiten la implementación de cada método o aproximación específica a la solución de un problema, considerando su complejidad, la precisión de la solución deseada y la operatividad y duración del proceso para conseguirla (iteraciones, tomas de decisiones, número de operaciones, presentación periódica de resultados en simulaciones de sistemas dinámicos, etc.).

Existen en la literatura formalismos que permiten, mediante el análisis y una estrategia de solución, hacer accesible y manejable el proceso de solución formal de un problema desde la perspectiva numérica, lo que implica inevitablemente

un componente algorítmico. Los diagramas de flujo, cuya formalización y utilización en computación se remonta a los propios trabajos de Von Neumann y Goldstine (Goldstine, 1947), presentan de una forma rápida, sencilla y robusta la estructura de un algoritmo, independientemente de si se trata de un proceso en el sentido general o un programa de computador, y del lenguaje de programación que se emplee para su implementación. El diagrama de flujo ofrece, además, una correspondencia estrecha con la implementación computacional de la solución, haciendo que la tarea de llevar el planteamiento matemático formal del problema a la solución computacional requerida sea natural, comprensible y reproducible. Los diagramas de flujo permanecen vigentes y apoyan la evolución de los Lenguajes de Modelado de Sistemas informáticos, como el UML, en el cual aparecen, en una versión adaptada, como diagramas de actividades.

En el proceso de formulación, análisis y solución de problemas matemáticos, los modos de representación verbal, algebraico, diagramático y computacional permiten la presentación del conocimiento que interviene en los diferentes momentos de la solución de un problema y se pueden relacionar con las etapas de desarrollo del aprendizaje de la solución de problemas.

En el marco de este proyecto, el modelado matemático está apoyado por ambientes computacionales. De este modo, la abstracción, análisis, identificación de estados y solución conduce a la formulación de un algoritmo computacional y a su implementación en un lenguaje de programación –MatLab, un lenguaje de alto nivel diseñado para la ejecución de operaciones algebraicas de carácter numérico–. En este contexto, la metodología aplicada a la solución de problemas en los cursos estudiados constó de las siguientes etapas:

- Análisis verbal del problema (identificación de elementos como variables, relaciones de dependencia entre las mismas, estado inicial y condiciones del entorno).
- Formulación algebraica (relaciones formalizadas de manera rigurosa en lenguaje matemático).
- Diseño diagramático de un proceso general de solución.
- Implementación computacional de dicho proceso y obtención de soluciones aproximadas.

Así pues, la etapa de representación diagramática se interpretó y utilizó en los cursos asociados al proyecto como la representación del proceso general de solución de un problema formulado numéricamente para la obtención de la aproximación numérica satisfactoria a la solución de una instancia particular del problema, determinada mediante el escenario específico en el cual dicho

problema es parametrizado. Por ende, es imperativo el uso del lenguaje de los diagramas de flujo para llevar a cabo dicha representación a manera de algoritmo general. Este se empleó de la siguiente manera en las asignaturas de Modelado y Simulación y de Matemáticas III para representar un proceso general de solución en cada caso de estudio:

- Identificación de variables como representación (cuantitativa) del estado del sistema que enmarca el problema.
- Identificación de relaciones entre variables en el contexto del problema, como ecuaciones o sistemas de ecuaciones.
- Determinación de valores iniciales de variables y de valores de parámetros constantes
- Propuesta de pasos generales para llevar al problema a un estado de solución.
- Salida adecuada (reporte de valores, gráficas de evolución) de la solución obtenida.

Por otro lado, puede afirmarse que el trabajo diagramático es inherente a la dinámica de sistemas (DS); tradicionalmente se utilizan dos tipos de diagramas: los de influencias (también llamados diagramas causales) y los de flujo y niveles (conocidos también como diagramas de Forrester). El alto nivel de transdisciplinariedad, generalidad y escalabilidad de la DS, que la hace aplicable casi en cualquier área del conocimiento, y su orientación a la diagramación, promueve el aprendizaje colaborativo (Schwaninger y Ríos, 2008).

La tendencia ortodoxa suele evitar los diagramas de influencias. Según Jay Forrester, reconocido como el fundador de la DS, carecen de una disciplina de pensamiento, fallan en la identificación de los elementos que producen el comportamiento del sistema, y llevan a apreciaciones erróneas, por lo que solo sirven como elementos explicativos de modelos previamente representados en flujos y niveles (Forrester, 1994).

Pero para una tendencia cualitativa que progresivamente logra más adeptos, los diagramas de influencias apoyan el trabajo interdisciplinario, pueden ser desarrollados con rigor suficiente, y ayudan a las personas a externalizar y enriquecer sus modelos mentales (Wolstenholme, 1999). Son útiles para resumir cantidades grandes de texto, orientar una discusión, explicar el comportamiento de los sistemas a partir de estructuras cíclicas, ampliar el contexto de abordaje de un problema, y son un paso intermedio entre el lenguaje natural y el lenguaje matemático (Coyle, 2000).

## Resultados

### Resultados cuantitativos

La representación diagramática tuvo dos formas de desarrollo: primero, en los cursos de Matemática III y Modelamiento y Simulación, los estudiantes usaron el ambiente DIA, de forma espontánea, sin instrucciones explícitas sobre cómo elaborar la representación; segundo, los estudiantes de Dinámica de Sistemas siguieron parámetros explícitos sobre la elaboración de diagramas de influencias.

En los cursos de Matemáticas III (Ecuaciones diferenciales) y Modelamiento y Simulación se aplicó el modelo de análisis de regresión con las calificaciones obtenidas en las evaluaciones como variables dependientes. Se analizó el efecto de la cantidad de cajas contenidas en los diagramas y el número de cajas que contenían ecuaciones matemáticas o texto explicativo de los procesos. La cantidad absoluta de cajas en ningún caso muestra relación con las calificaciones obtenidas. En la primera evaluación ninguna de las tres variables independientes mostró efecto en la primera evaluación.

En la segunda evaluación tanto el número de cajas con explicaciones textuales como el número de cajas con ecuaciones son predictores de las calificaciones obtenidas. El valor de  $F(2,81)=4,4216$ , con un valor  $p < 0,01505$  muestra que el modelo de regresión explica el comportamiento de la variable dependiente (tabla 1). Los valores  $t$  para cada una de las dos variables son significativos. Sin embargo, hay que notar que ese valor es negativo para la variable cajas con ecuaciones, lo cual significa que la inclusión de cajas con solo ecuaciones tiene una relación negativa frente a la nota, al contrario de lo que sucede con las cajas con texto o texto y ecuaciones.

**Tabla 1.** Análisis de regresión tomando como variable dependiente la calificación obtenida en la segunda evaluación al 60% del desarrollo del curso y como variables independientes las cajas que contienen texto o ecuaciones en los diagramas presentados por los estudiantes

Regression Summary for Dependent Variable: NOTA2						
R= ,31373377 R²= ,09842888 Adjusted R²= ,07616786						
F(2,81)=4,4216 p<,01505 Std.Error of estimate: 1,0742						
St. Err.		St. Err.				
	BETA	of BETA	B	of B	t(81)	p-level
Intercpt			2,599646	0,157492	16,50654	0,000000
CAJASTEXO2	0,609490	0,212644	0,113646	0,039650	2,86625	0,005291
CAJASECUACION2	-0,445592	0,212644	-0,076138	0036334	-2,09549	0,039251

**Fuente:** elaboración propia.

Cuando aplicamos el mismo modelo de regresión tomando como variable dependiente las calificaciones del examen final las relaciones tienden a replicarse. En efecto el valor  $F(2,51)=10,393$ , con un valor  $p<0,00016$  muestra que el modelo tiene aún mayor valor explicativo que en la evaluación previa (tabla 2). La variable “Cajas con texto” tiene un efecto muy significativo y positivo en la variable dependiente. El efecto de la segunda variable se debilita y continúa con signo negativo. Por tanto, nos encontramos con un proceso evolutivo en el cual los estudiantes que logran no solo considerar las ecuaciones de la solución del problema sino explicar y categorizar cada paso de la solución tienen mejores calificaciones.

**Tabla 2.** Análisis de regresión tomando como variable dependiente la calificación obtenida en la tercera evaluación al 100% del desarrollo del curso y como variables independientes las cajas que contienen texto o ecuaciones en los diagramas presentados por los estudiantes

Regression Summary for Dependent Variable: NOTA3						
R= ,53810343 R²= ,28955530 Adjusted R²= ,26169473						
F(2,51)=10,393 p<,00016 Std.Error of estimate: 1,1166						
	BETA	St. Err. of BETA	B	St. Err. of B	t(51)	p-level
Intercpt			2,486351	0,216860	11,46524	0,000000
CAJASTEXTO3	0,618598	0,146628	0,126535	0,029993	4,21881	0,000101
CAJASECUACION3	0-,163045	0,146628	0-,041929	0,037707	-1,11196	0,271370

**Fuente:** elaboración propia.

En la asignatura de Dinámica de Sistemas, la metodología consistió en la formulación, prueba y depuración de explicaciones de las causas internas del comportamiento de un sistema, para el desarrollo de políticas de manejo y toma de decisiones, haciendo uso de mapas informales, modelos formales y simulaciones computarizadas que representarían el origen endógeno del comportamiento del sistema (Richardson, 2011). Tiene el propósito de hacer modelamiento semántico que sirva como puente entre el proceso de aprendizaje acerca de la dinámica de un fenómeno y el diseño conceptual (diagramas de clases, diagramas relacionales, entre otros) de *software* para intervenir en el mismo (Jaime, 2012).

La forma de diagramación seleccionada para el curso fue la de diagramas de influencias. No se utilizó un *software* desarrollado específicamente para elaborar diagramas de influencias. Para trabajar en un ambiente colaborativo, los estudiantes se organizaron en grupos de cuatro o cinco integrantes y utilizaron la herramienta de elaboración de diapositivas de la plataforma Google Drive, cada uno desde un computador distinto, para así evitar estar en puestos adyacentes, esto con el fin de que durante la discusión del caso no establecieran comunicación oral y recurrieran a la comunicación escrita por medio del chat incluido en la herramienta.

**Tabla 3.** Relación entre pasos acertados y calificaciones obtenidas en el examen final

Regression Summary for Dependent Variable: EXAFINAL						
R= ,43624062 R <sup>2</sup> = ,19030587 Adjusted R <sup>2</sup> = ,16717176						
F(1,35)=8,2262 p<,00695 Std.Error of estimate: ,37017						
	BETA	St. Err. of BETA	B	St. Err. of B	t(35)	p-level
Intercept			3,812574	0,209149	18,22898	0,000000
PASOS ACERTADOS	0,436241	0,152099	0,065137	0,022711	2,86814	0,006951

**Fuente:** elaboración propia.

Se compararon los pasos seguidos por el estudiante con los del profesor. Con base en la comparación de los diagramas de los estudiantes con los del profesor se determinó el número de pasos acertados. El número absoluto de pasos no mostró relación significativa con los resultados en la evaluación. Tampoco se encontró relación con el grado de detalle o especificidad de los diagramas. El profesor asignó un valor de calidad de la representación, y tampoco se encontró correlación significativa entre éste y los resultados en el examen.

Se encontró una relación estadísticamente significativa entre el número de pasos acertados y los resultados en el examen final. El modelo de regresión (tabla 3), muestra un valor  $F(1,35)=8,2262$ , con valor  $p<0,00695$  que muestra una relación significativa entre las dos variables.

### Resultados cualitativos

Los estudiantes representaron de manera gráfica el proceso de solución del problema usando el *software* DIA. Se analizó una muestra del 30% de los estudiantes de los cursos de Matemáticas III y Modelamiento y Simulación que completaron tres representaciones diagramáticas, cada una para una unidad temática. Los diagramas incorporan cajas que se unen por conectores y contienen estructuras de decisión, expresiones verbales en forma de títulos o explicaciones de procesos y procedimientos, y fórmulas matemáticas.

Para la realización del análisis cualitativo se tuvo en cuenta el siguiente procedimiento:

- Cada uno de los diagramas se analizó de manera individual. Este proceso se realizó a través de un instrumento de recolección de información (ver Apéndice)
- Se contrastaron las tres representaciones diagramáticas elaboradas por cada estudiante con el fin de determinar los modos de representación y los avances en términos del logro de aprendizaje, contrastado con los resultados cuantitativos de cada corte.

Este análisis tuvo como propósito diferenciar el aporte de la representación diagramática en el desarrollo de competencias de modelamiento matemático e identificar el tipo de estructura utilizada (de flujo, de secuencia, de procesos, otros). En alguna medida fue posible caracterizar los estilos de representación elaborada.

También se indagó acerca de los estados de transición y los operadores elaborados para llegar al estado solución de cada caso, según Newell y Simon (1972) y contrastar estos resultados con las representaciones diagramáticas elaboradas por el experto.

En síntesis, el análisis cualitativo permitió visualizar efectos positivos en términos del logro de aprendizaje tras la utilización de la representación diagramática en la solución de problemas matemáticos. Puede afirmarse esto con base en la evolución encontrada entre los diagramas elaborados por cada estudiante y su relación con los resultados en el logro de aprendizaje (cuantitativo) en los tres cortes realizados durante el semestre. En este mismo orden de ideas, el análisis también permitió encontrar que los estudiantes que presentan evaluaciones cuyos resultados son superiores a la media estadística de cada grupo, son estudiantes que lograron estructurar modelos eficientes de representación diagramática en comparación con los estudiantes que no alcanzaron estos niveles.

En lo que atañe al abordaje de los casos, se observaron con claridad tres momentos, en concordancia con los planteamientos de Russell y Norvig (1995). En un primer momento los estudiantes presentan la información que les suministra el problema en dos cajas, que incorporan las variables de entrada con sus valores y las incógnitas, según el caso. El segundo momento está relacionado con la transición de estados y operadores utilizados para modificar el estado inicial, para lo cual los estudiantes realizan entre dos y tres bloques gruesos de procesos, los cuales presentan detalladamente los estados de transición y, finalmente, la aproximación al estado solución.

Una gran proporción de los estudiantes no elaboró heurísticas eficientes en la primera representación diagramática, lo que los llevó a distanciarse del estado solución. En este estadio los diagramas elaborados carecen de especificidad y no se evidencian dominios conceptuales estructurados. El número de cajas utilizadas y las conexiones entre ellas son pocas. En esta primera elaboración, más que representaciones diagramáticas hay representaciones algebraicas entre cajas de diálogo interconectadas, las cuales no dan cuenta de la solución del problema de manera clara.

En el segundo y en el tercer caso, los estudiantes utilizaron un mayor número de cajas y de conexiones entre ellas, lo que refleja más especificidad en sus procesos. Se observó una mayor tendencia a la elaboración de heurísticas eficientes en los diagramas elaborados, los cuales incorporan estructuras de de-



cisión simples y otros elementos que provee el programa de computador. Las representaciones elaboradas son interesantes en la medida que el estudiante se apoya en la utilización de predicados verbales para identificar la acción que debe llevarse a cabo o comentar los estados de transición; estos a su vez son acompañados de expresiones matemáticas (ecuación, integrales y/o fórmula matemática). Lo anterior permite afirmar que los estudiantes presentan modelos conceptuales más eficientes visualmente. En esa medida, un mayor número de estudiantes plantearon un estado solución, cercano a la representación diagramática elaborada por el experto. En resumen, los estudiantes adquieren progresivamente mayor habilidad para elaborar los diagramas y desarrollan mayor rigor conceptual.

## Discusión y conclusiones

Tanto el análisis de antecedentes como los resultados de esta investigación muestran que la diagramación es una estrategia que se relaciona positivamente con el aprendizaje. Además, los estudiantes mejoran progresivamente su capacidad de solucionar problemas mediante diagramas, y la experiencia previa de solución algebraica les facilita la diagramación. La elaboración espontánea lleva a algunos estudiantes, especialmente en etapas iniciales, a colocar simplemente los pasos algebraicos en cajas. Si bien esta no es la solución ideal, sí induce al estudiante a representar la lógica de solución y en etapas siguientes desarrolla conceptualizaciones sobre el proceso lógico de solución. Este razonamiento, cuando se traduce en expresiones textuales y títulos, muestra un nivel de conocimiento superior al algebraico, que se relaciona estadísticamente con mejores resultados en los exámenes de las diferentes asignaturas con las cuales se hizo el estudio. También es de notar, como se observa en el curso de Dinámica de Sistemas, que la cantidad de elementos que se introducen en la diagramación en sí no se correlaciona con el rendimiento en los exámenes; es, por un lado, la conceptualización sobre el proceso lógico expresado en comentarios verbales y títulos y, por otro, la eficacia en la solución del problema, lo que posibilita aprendizaje.

Nuestros resultados concuerdan con los de Uesaka, Manalo e Ichikawa (2007) que muestran que la diagramación requiere de práctica y de entrenamiento. En los cursos de Matemáticas III y Modelamiento y Simulación, el entrenamiento en diagramación no fue tan sistemático como en el de Dinámica de Sistemas. Los resultados apoyan la interpretación de que el entrenamiento sistemático puede llevar a convertir la diagramación en estrategia de aprendizaje muy eficiente, lo cual hace necesaria la definición de una metodología más sistemática de formación de los estudiantes.

En contraposición al curso de Dinámica de Sistemas, en el cual hubo una conceptualización explícita de la diagramación pero no un *software* que indujera a su utilización, los cursos de Matemática III y Modelamiento y Simulación no contaron con una concepción explícita de la diagramación, pero sí con un *software* que induce al uso de categorías al presentar cajas de diferente forma.

El hecho de que los resultados sean similares, nos hace pensar en el poder de inducción del *software* como apoyo para el estudiante y el profesor. La combinación del *software* y de una concepción sobre las categorías de diagramación puede elevar la eficacia del sistema.

## Recomendaciones y trabajo futuro

La solución de problemas desde la perspectiva del modelado como eje de la formación en ingeniería implica el desarrollo de competencias para generar representaciones abstractas del sistema estudiado. Tales modelos (abstracciones), según la taxonomía de Bloom en sus interpretaciones modernas (Anderson y Krathwohl, 2001), requieren de una comprensión detallada del problema, es decir, de una interpretación adecuada del sistema en el que el problema está definido y, por ende, precisan la identificación correcta de los elementos intervinientes y de las relaciones entre los mismos (análisis).

En este sentido, y en relación con las dificultades y retos establecidos a partir del análisis de los resultados del presente estudio, se hace necesaria la formulación de una metodología para el uso de representaciones diagramáticas de cursos fundamentados en el modelado matemático, de manera que se garantice un énfasis suficiente en el desarrollo de competencias relacionadas con el análisis formal de problemas mediante la identificación de parámetros, variables y estados (particularmente, iniciales y objetivos) del problema como sistema.

Las competencias operativas asociadas a la herramienta empleada para la representación diagramática, relacionadas con la capacidad de representación de procesos de solución algorítmica de problemas, requieren un uso más riguroso de las herramientas de desarrollo de algoritmos para su ejecución en el computador, como el pensamiento algorítmico, el uso de lenguajes apropiados, entre otros.

Dado el perfil de los profesores de las áreas relacionadas con matemáticas y la variabilidad en la formación de los estudiantes del curso, en relación con su procedencia (diferentes carreras de ingeniería, potencialmente en diferentes fases de su formación profesional) y habilidades, se requiere reforzar en etapas iniciales del curso las destrezas en el uso de representaciones algorítmicas, como los diagramas de flujo, el pseudocódigo, los lenguajes de programación

de alto nivel y la formulación misma de algoritmos para la implementación de aproximaciones numéricas a la solución de problemas.

Asimismo, se evidencia la necesidad de que tanto los profesores como los estudiantes usen con mayor rigor las características de la representación diagramática y su aplicación al diseño de procesos de solución de problemas matemáticos. Estos aspectos implican la formulación de un modo de representación diagramático que se adapte a las necesidades de representación de procesos de solución de problemas, que también contemple su generalidad y capacidad de enfrentar diferentes escenarios mediante las entradas y la inicialización de parámetros, y que determine el grado de detalle esperado en la solución propuesta en cada caso de estudio (definición de una metodología, una plantilla para la solución de problemas con estructura análoga o la solución a casos específicos). Tal formulación podría incorporarse al desarrollo de los cursos como prácticas fundamentadas en casos de estudio sencillos (tutoriales y talleres guiados), llevadas a cabo en las primeras etapas de cada curso.

## Referencias

- Anderson, L. W. y Krathwohl, D. R. (eds.). (2001). *A Taxonomy for Learning, Teaching and Assessing: A Revision of Bloom's Taxonomy of Educational Objectives*. New York: Longman.
- Coyle, G. (2000). Qualitative and Quantitative Modelling in System Dynamics: Some Research Questions. *System Dynamics Review*, 16(3): 225-244.
- Forrester, J. (1994). System Dynamics, Systems Thinking, and Soft OR. *System Dynamics Review*, 10(2): 245-256.
- Goldstine, H. H. y von Neumann, J. (1947). *Planning and Cocting of Problems for an Electronic Computing Instrument, Part II, I*. Reporte preparado por U. S. Army Ord. Dept. under Contract W-36-034-ORD-7481. [T,V, 80-151; AB, 151-222].
- Gordon, G. J. (1999). Approximate Solutions to Markov Decision Processes. *Robotics Institute. Paper 228*. Disponible en <http://repository.cmu.edu/robotics/228>
- Hembree, R. (1992). Experiments and Relational Studies in Problem-Solving a Meta-Analysis. *Journal for Research in Mathematics Education*, 23: 242-273.
- Jaime, R. (2012). Modelamiento semántico con dinámica de sistemas en el proceso de desarrollo de software. *RISTI - Revista Ibérica de Sistemas e Tecnologias de Informação*, 10(1): 19-34.

- Kaput, J. (1989). Linking Representations in the Symbol Systems of Algebra. En S. Wagner y C. Kieran (eds.), *Research Issues in the Teaching and Learning of Algebra* (pp. 167-194). Reston, VA: NCTM.
- Larkin, J. H. y Simon, H. A. (1987). Why a Diagram is (Sometimes) Worth ten Thousand Words. *Cognitive Science*, 11:65-99.
- Narayanan, N. H., Suwa, M. y Motoda, H. (1995). Hypothesizing Behaviors from Device Diagrams. En J. Glasgow, N. H. Narayanan y B. Chandrasekaran (eds.), *Diagrammatic Reasoning: Cognitive and Computational Perspectives* (pp. 501-534). Menlo Park, CA: AAAI Press/The MIT Press.
- Newell, A. Shaw, J. C. y Simon, H. A. (1958) Elements of a Theory of Human problem solving. *Psychological Review*, 65, 151-166
- Newell, A., Shaw, J. C. y Simon, H. A. (1959). Report on a General Problem-Solving Program. *Proceedings of the International Conference on Information Processing* (pp. 256-264).
- Newell, A. y Simon, H. A. (1972). *Human Problem Solving*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall.
- Panasuk, R. M. y Beyranevand, M. L. (2010). Algebra Students' Ability to Recognize Multiple Representations and Achievement. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*. Disponible de <http://www.cimt.plymouth.ac.uk/journal/default.htm>
- Richardson, G. P. (2011). Reflections on the Foundations of System Dynamics. *System Dynamics Review*, 27(3): 219-243.
- Roth, W. M. (2002). Reading Graphs: Contributions to an Integrative Concept of Literacy. *Journal of Curriculum Studies*, 34(2): 1-24.
- Russell, S. y Norvig, P. (1995). *Artificial Intelligence: A Modern Approach*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.
- Ryve, A. (2006). Making Explicit the Analysis of Students' Mathematical Discourses - Revisiting a Newly Developed Methodological Framework. *Educational Studies In Mathematics*, 62(2): 191-209.
- Schwaninger, M. y Ríos, J. P. (2008). System Dynamics and Cybernetics: A Synergetic Pair. *System Dynamics Review*, 24(2): 145-174.
- Uesaka, Y., Manalo, E. y Ichikawa, S. (2007). What Kinds of Perceptions and Daily Learning Behaviors Promote Students' Use of Diagrams in Mathematics Problem Solving? *Learning and Instruction*, 17: 322-335.

- Valencia, Sanabria e Ibáñez (2012). Procesos cognitivos y metacognitivos en la solución de problemas de movimiento de figuras en el plano a través de ambientes computacionales. *Revista Tecné, Epistemé y Didaxis*, 31: 45-65.
- Van Essen, G. y Hamaker, C. (1990). Using Self-Generated Drawing to Solve Arithmetic Word-Problems. *Journal of Educational Research*, 83: 301-312.
- Vergnaud, G. (1997). The Nature of Mathematical Concepts. En P. Bryant (ed.), *Learning and Teaching Mathematics*. East Sussex: Psychology Press.
- Wang, G. G. y Shan, S (2007, abril). Review of Metamodeling Techniques in Support of Engineering Design Optimization. *J. Mech. Des.*, 129(4).
- Wolstenholme, E. (1999). Qualitative v. Quantitative Modeling: The Evolving Balance. *Journal of the Operational Research Society*, 50(4): 422-428.

## Apéndice

Sesión: 3	Fecha: 16 de noviembre
Código estudiante: 1022359676	Asignatura: Matemáticas III
Profesora: M. R.	Caso: Salto con Bungee Jumping

**Problema.** Determine un modelo matemático para esta situación. Definir las variables, condiciones iniciales y dar respuesta a la decisión de: en qué condiciones Daniel puede realizar un salto seguro.

**Descripción.** El estudiante identificado con código 1022359676 utilizó doce cajas en total para dar respuesta al problema del Salto con *Bungee Jumping*. Se evidencian con claridad los estados de transición de estados. El estudiante elaboró una representación de secuencias, la cual incorpora tres cajas con forma de estructuras de decisión. En primer lugar, el sujeto planteó las condiciones iniciales del problema. Luego, a través de cajas que incorporan textos tanto en su interior como en la parte exterior, el sujeto presentó las alternativas posibles. Paralelo a ello, en otras cajas de texto se plantean los valores de las variables y las expresiones matemáticas que llevan desde la transición de estados hasta la solución del problema. El sujeto comentó en su totalidad la transición de estados a la vez que planteó las expresiones algebraicas que debía utilizar. Además, elaboró el diagrama incorporando información textual tanto

dentro como fuera de las cajas, con lo cual manifiesta una forma de diálogo entre los textos y las expresiones algebraicas durante el desarrollo del problema.

**Valoración.** Se evidencia un avance significativo en el modo de representación utilizado en este diagrama, en comparación con los de las sesiones anteriores. La representación elaborada presenta rigor, claridad y un proceder metodológico bien interesante. El sujeto halló un modo de representación diagramática eficiente. En la transición de estados del problema, se evidencia la utilización de ciclos o estructuras de decisión, las cuales funcionan más como rutas que podrían seguirse.

**Síntesis.** En general, el estudiante con código 1022359676 evoluciona en su modelo de representación diagramática en los tres problemas que resuelve. El diagrama del tercer caso es el de mejor calidad. Las representaciones que hace el sujeto se caracterizan por ser medianamente detalladas, lo que lo lleva a utilizar un número no muy amplio de cajas (once cajas en promedio). Incorpora en sus representaciones expresiones textuales y algebraicas. Llega al estado solución en el segundo y en el tercer problema, lo que no ocurre en el primero. Las notas de los tres parciales del sujeto fueron: 2,5, en el primer parcial; 3,5, en el segundo parcial; y 3,0, en el tercer parcial. Obtuvo una nota definitiva de 3,0. Los resultados anteriores no permiten demostrar un efecto positivo de la utilización de la representación diagramática, pero sí se visualiza una curva ascendente en términos del logro académico con mayor aumento entre el primer y el segundo corte. El estudiante está entre el grupo de los estudiantes que aprobaron el curso, correspondiente al 66%.

## Capítulo 8



# Representación computacional y desarrollo de la competencia de modelamiento

Albert Montenegro Vargas\*  
Dora Janeth Alfonso Cómbita\*\*  
Sergio Andrés Zabala Vargas\*\*\*

### Introducción

El presente capítulo está dedicado a la simulación por computador como estrategia para consolidar competencias de modelado en ingeniería. Si bien, el tema de la integración informática a los procesos curriculares tiene una literatura bastante prolija, el tema particular que nos ocupa es relativamente nuevo. Por otro lado, se revisarán los antecedentes pertinentes que pueden ayudar a la comprensión de los procesos de aprendizaje, y se relatará la validación de una aproximación experimental sobre el tema:

La simulación es una de las formas de representación atendida en el proyecto y forma parte de un sistema en el que la representación verbal, algebraica y diagramática son procesos previos. Nuestro objetivo es consolidar estrategias para la implementación de elementos computacionales en el análisis y modelamiento de entornos, en las asignaturas de Matemáticas III y Modelado y Simulación, ambas asociadas a la Universitaria de Investigación y Desarrollo -UDI- y a la Universidad Central.

\* M. Sc. y docente investigador del Departamento de Matemáticas, Universidad Central. Grupo de investigación Tecnimat. Correo electrónico: amontenegrov@ucentral.edu.co

\*\* M. Sc. y docente investigadora del Departamento de Ingeniería de Sistemas de la Universidad Central. Correo electrónico: dalfonsoc@ucentral.edu.co

\*\*\* Ingeniero y docente investigador de Universitaria de Investigación y Desarrollo. Grupo de investigación Gidsaw.

## Antecedentes

### Formación de competencias de modelado en ingeniería

Estudios sobre el tema de formación de competencias de modelado en programas de ingeniería demuestran la problemática específica de la ingeniería, la cual busca soluciones con apoyo en el modelado, de modo que los estudiantes logren consolidar, dominar y aplicar los conceptos adquiridos en diversos contextos.

Particularmente, para el área de Ingeniería, Vernon (2000) señala que las competencias esenciales para los jóvenes ingenieros pueden ser clasificadas bajo el título de “habilidades y conocimiento”. Dentro de las “habilidades” destaca: comunicación, trabajo en equipo, resolución de problemas y aprender a aprender. Estas habilidades ciertamente son aplicables a otras áreas, no exclusivamente a Ingeniería. Con “conocimiento” se refiere el entendimiento de los principios de la ingeniería, bases importantes en matemáticas y ciencia, elementos de economía, negocios y gerencia, conocimiento específico de una rama de la ingeniería, introducción a la ética y educación en temas ambientales. Para este autor, el ambiente de aprendizaje debe estimular a los estudiantes e incentivarlos a desarrollar la capacidad de aprendizaje durante toda la vida como preparación para manejar los problemas futuros.

Un problema que debe tenerse en cuenta es que debido a la cantidad de conocimiento disponible, es necesario que los estudiantes desarrollen las habilidades para filtrar lo irrelevante de lo vital. Estas consideraciones pueden ampliarse a cualquier área.

### Necesidad del modelado en la formación de ingenieros

La formación de ingenieros, con el ánimo de ofrecer una capacitación integral, incorpora diferentes áreas y asignaturas para utilizar conceptos en la solución de un problema determinado. Kofman (2000) señala cómo la relación o el uso de modelos y las leyes físicas tienen una gran importancia para el aprendizaje de la física y destaca la aplicación de simulaciones computacionales para la enseñanza de la misma.

Dentro de la enseñanza de las matemáticas, Trigueros (2009) considera que debe buscarse el equilibrio entre aquellos aspectos de la modelación que son importantes de destacar y los conceptos que se quieren enseñar. Además, los resultados obtenidos en experiencias muestran que el diseño de las actividades debe favorecer el regreso al problema de la modelación. Concluye que el diseño de las situaciones constituye un elemento central para que el uso de la modelación tenga éxito:



... un problema planteado en buenos términos coadyuva el compromiso de los estudiantes en su solución y el aprendizaje de nuevos conceptos. Evidentemente, no todos los estudiantes avanzan de la misma manera, ni logran profundizar en los conceptos como sería deseable, pero puede decirse que los resultados obtenidos en este tipo de proyectos muestran con claridad las bondades de este acercamiento a la enseñanza de las matemáticas en la universidad (p. 87).

Mendible (2007) menciona que, en ingeniería, modelar constituye una competencia profesional de innegable utilidad práctica. El diseño, en particular, es una actividad que se soporta en la analogía, dualidad o relación entre el mundo físico o conceptual extra matemático, con los entes abstractos de la matemáticas, considerando formas y estructuras que muestren comportamiento. Los retos para el docente y para el estudiante de ingeniería son la adquisición de las habilidades de modelización matemática y aplicaciones en la resolución de problemas. Es evidente que la modelización, como proceso gestor de cambio y de contextualización ejercida por el ingeniero, representa, en los tiempos modernos, una filosofía de trabajo, que además posee dos sentidos: el de la realidad hacia el modelo y el del modelo hacia la realidad. Los modelos matemáticos, producto de este proceso, son adecuados si ellos describen, explican y predicen aproximadamente los efectos del fenómeno real que se desea representar.

### **El fortalecimiento de las competencias en la formación de ingenieros con el uso de ambientes computacionales**

Surge la necesidad de apoyar los procesos de enseñanza-aprendizaje en la formación de ingenieros por medio de herramientas computacionales que permitan no solo el desarrollo y fortalecimiento de competencias como conceptual, operativa y modelativa, sino también ayudar adquirir habilidades para identificar la forma de representación más conveniente para solucionar un problema planteado, bien sea de forma verbal, computacional, diagramática o algebraica, o en la selección de la herramienta computacional más apropiada.

Kofman (2003) menciona que todo nace del deseo de solucionar un problema, para lo cual puede plantearse una serie de modelos de solución (modelo ideal) donde el estudiante verifica si es adecuado o no. Aunque para ello debe darse el siguiente proceso:

- Representar la solución mediante un modelo matemático.
- Representar el modelo matemático con ayuda de un software específico y analizar la relación que se pueda presentar con el fenómeno a solucionar.

- Realizar una programación de modelos computacionales por los mismos estudiantes. Esto requiere que se tengan un conocimiento del tema y manejo de estructuras algorítmicas, además de un lenguaje de programación. De igual manera, requiere considerar todas las alternativas posibles de solución, implicando un mayor grado de aprendizaje en resolución de problemas.

Kadijevich (2005) menciona que no todos los docentes de matemáticas se dan cuenta de la importancia del computador para el modelado. Así tengan la disponibilidad de las herramientas (computadores) para ser usadas en la practicas educativas, no las usan con frecuencia, debido a que probablemente no tienen el conocimiento y las habilidades para darles un mejor uso. Podría decirse que las matemáticas ayudan para que se dé un uso más eficiente y adecuado de las herramientas para ayudar a mejorar en beneficio del aprendizaje. Cuando los estudiantes usan la tecnología para aplicar conceptos adquieren un mejor dominio de las aplicaciones y del modelado por los resultados que observan. Por esta razón, se dan cuenta de que ya no desean hacer cálculos manuales con lápiz y papel.

De acuerdo con los planteamientos anteriores, puede verse un recorrido por soluciones que han aportado en ayudar a incorporar los procesos de enseñanza-aprendizaje con nuevas tecnologías para el desarrollo de las competencias de modelado en la formación de los ingenieros de diversas áreas.

Duarte (1998), con su proyecto Homos, ofrece un marco de referencia y una herramienta en el modelamiento y simulación de sistemas que contemplan el espacio, fundamentados en los principios de Autómatas Celulares y en la Tecnología Orientada a Objetos. Soporta un nuevo enfoque educativo, donde los conocimientos serán asimilados por experiencia y análisis de fenómenos naturales representados mediante un modelo sistémico de objetos y reglas. El modelamiento de sistemas basado en objetos y reglas tiene la ventaja sobre las demás metodologías de modelamiento, pues allí se tiene en cuenta la variable “espacio”, la cual permite acercar a la realidad el comportamiento de los objetos en un ambiente real.

López (2000) incorpora nuevas operaciones y posibilidades a un paquete de procedimientos de simulación desarrollado anteriormente en el lenguaje *Mathematica* (Pace et ál., 1999), y codifica el Método de los Números Índice para la generación de muestras artificiales, una aplicación que resuelve el problema del cálculo de áreas, y otras dos que efectúan la simulación de dos modelos matemáticos diferentes: uno de hidrología y otro de variables climáticas.

López (2004) presenta la necesidad que surgió de mejorar la enseñanza-aprendizaje de los conceptos que se estudian en el curso de Modelos y Simulación, dentro de la cual los estudiantes requieren aplicar conceptos previos

para poder resolver problemas que son planteados en la asignatura. El software educativo diseñado se orientó a facilitar la comprensión de los pasos y las etapas involucradas en el desarrollo de modelos de simulación. Se trata de herramientas informáticas facilitadoras de realización de prácticas interactivas que se implementan como complemento educativo de las clases tradicionales, para brindarles a los alumnos la posibilidad de adquirir habilidad en el manejo de los métodos de generación de números pseudoaleatorios, muestras artificiales y pruebas de hipótesis para su verificación, y la modelización y simulación de problemas. Los diversos temas del programa de la asignatura Modelos y Simulación son aplicados mediante propuestas de trabajos prácticos cuya resolución obliga a los alumnos a revisar los conceptos estudiados desde el inicio del curso. Esta situación se da también entre asignaturas, ya que los alumnos deben aplicar los conocimientos adquiridos en materias de años anteriores (teoría de probabilidades y estadística, lenguajes de programación, etc.). Los trabajos prácticos propuestos motivan al alumno para que elabore los conceptos estudiados y luego los aplique en el desarrollo de los programas de simulación en computadora.

Hilera y Palomar (2005) presentan la especificación *IMS-Learning Design* (LD), la cual permite diseñar los procesos de enseñanza-aprendizaje en forma de modelos registrados en archivos de fácil reutilización como xml. De esta manera, también se valora la utilidad del estándar de modelado de sistemas denominado UML (*Unified Modeling Language*) para establecer meta-modelos en la especificación IMS-LD, así como para elaborar modelos dinámicos que reflejen la organización de las actividades de un proceso de enseñanza-aprendizaje; se justifica la necesidad de disponer de herramientas informáticas para el diseño y ejecución de los procesos, de forma similar a como ocurre con los sistemas de *workflow*; se menciona la importancia de la colaboración entre expertos en tecnologías de la información y expertos en pedagogía para comprobar, por una parte, la viabilidad en cualquier ámbito educativo de los estándares propuestos y de las herramientas desarrolladas y, por otra, colaborar en la definición de nuevos mecanismos para aumentar las posibilidades de la tecnología en el ámbito del modelado de procesos de enseñanza-aprendizaje.

Mariño y otros (2007) describen el apoyo de un entorno *b-learning* desarrollado para la asignatura Modelos y Simulación, que permita determinar que es un medio más conveniente para la distribución de material interactivo y aprovechar los recursos tecnológicos proporcionados por las TIC y su adecuación atendiendo a las características de los alumnos. Presenta aplicaciones prácticas de los tres ejes principales de la asignatura: números aleatorios, muestras artificiales y modelos de simulación, con ejercicios prácticos de ejemplo (diagramas de flujo), descripción del software cuyo propósito es favorecer el uso de lenguajes de programación en la solución de los problemas.

Durán, Costaguta y Gola (2011) obtienen buenos resultados en los procesos de enseñanza y de aprendizaje en la asignatura Simulación, al combinar el modelo *b-learning* con métodos colaborativos, y sugieren que ambos enfoques deben ser considerados como una alternativa válida en las planificaciones futuras de esta asignatura y de otras con características similares.

### **El modelado y la simulación como herramientas para el fortalecimiento de intervención en sistemas educativos**

La naturaleza del aprendizaje en educación superior cambiará sustancialmente y las tecnologías de la información serán un elemento fundamental del cambio, refieren Norris, et ál. (1996). Entre otros puntos señalan que, en vez de aprendizaje continuado, será aprendizaje perpetuo; en lugar de sistemas de aprendizaje separados, habrá sistemas integrados; y en lugar de cursos tradicionales, grados y calendarios académicos. Las experiencias de aprendizaje estarán basadas en las necesidades del aprendiz.

El aprendizaje se lleva a cabo cuando alguien recoge información del entorno en función del desarrollo de un proyecto. Para Andersen (1991) la capacidad de las personas para asimilar información e interactuar con ella depende en gran medida de cómo se presente dicha información. Por este motivo, la educación en la universidad juega un papel importante en la formación de profesionales, cuyos objetivos de la educación son: adquisición de conocimientos, estructuración y desarrollo de la mente, facilidad para identificar, conceptualizar y modelizar situaciones, capacidad de razonamiento y solución de problemas, desarrollo de capacidades de innovación, adaptación al cambio y control de la inestabilidad y capacidad de comunicarse con los demás (Pazos 2001).

Al citar características de los años 90 como la internacionalización de la economía, globalización de la comunicación e información y diversificación del empleo, señalan Marchesi et ál. (1998) que los sistemas educativos deben preparar a sus alumnos para las nuevas demandas. Los cambios educativos son inevitables y necesarios. “Estando inmerso el sistema educativo en una sociedad en constante transformación, no es posible pensar que la institución educativa puede mantenerse alejada de las modificaciones que permanentemente van sucediendo”. (p. 35). Por eso Tomás et ál., (1999) proponen considerar nuevos contenidos y competencias en el currículum, nuevos instrumentos y recursos para la docencia y su gestión, acceso a todo tipo de información, nuevos canales de comunicación para el aprendizaje y la colaboración, nuevos escenarios educativos asíncronos (flexibles, interactivos, personalizados) y nuevos métodos pedagógicos (nuevas formas de comunicación y aprendizaje, enseñar a aprender).

Salinas (1996) destaca la necesidad de nuevos estilos de enseñanza que conduzcan a adecuar a los tiempos de cambio a los futuros profesionales. Esto supone lograr una enseñanza más activa así como un protagonismo mayor de los estudiantes en su propio aprendizaje. Ketudat (2000) indica que debe darse a las personas no solo habilidades generales y vocacionales, sino habilidades de aprendizaje y mentes perceptivas: el amor por aprender y habilidades de “aprender a aprender”; es decir, deuteroprendizaje según Antonio A. et ál. (2003). Lucas (2000) propone que la educación sea universal, esto es que afecte a todos, y obligatoria; durante toda la vida, con procedimientos adaptables y sistemas educativos flexibles. Mayorga (1999) refiere que en la educación del futuro será más importante aprender a aprender que memorizar contenidos específicos, la búsqueda y el uso de la información para resolver problemas que la transmisión de datos, los métodos activos y personalizados que los pasivos y estandarizados. También cambia la concepción de lo que significa ser maestro: de transmisor de conocimientos a facilitador del proceso de aprendizaje, que aprende continuamente él mismo.

El modelado y la simulación ocupan un papel muy importante en las investigaciones científicas, desarrollos tecnológicos, proyectos empresariales debido a que el mercado actual es muy dinámico. Hoy día se utilizan como un factor fundamental en la educación ya que permiten resolver problemas de modelado de procesos, como el diseño y la simulación, de igual manera para entrenamiento de situaciones prácticas, como base para juegos instructivos, en las matemáticas, la estadística o aplicaciones de ingeniería, también se utilizan en el mercado para resolver problemas de diseño, simulación, síntesis, optimización, inclusive en la enseñanza de la física, permite ver sus modalidades de aplicación para implementar experimentos de laboratorio y su función pedagógica, en otras áreas han facilitado el entrenamiento de pilotos de avión (por medio de simuladores de vuelo) y en actividades más recientes como en el aprendizaje que hacen médicos anestelistas con cuerpos humanos artificiales.

Ante estos aspectos el modelado y la simulación cobran una gran importancia ya que requiere que quien vaya a aplicar estos conceptos a la solución de cualquier problema, adquiera habilidades para comprender claramente el alcance general de las herramientas computacionales disponibles, las tendencias que se estén dando, la necesidad de diseñar sus propias herramientas para modelar problemas específicos en cualquier área o adquirir o utilizar productos nuevos que aporten al desarrollo del tema a enseñar y aprender como apoyo a la educación.

Finalmente, podría concluirse según Rodríguez (2009): “Una simulación educativa es una poderosa técnica que enseña algunos aspectos del mundo mediante su imitación o réplica. Está basada en un modelo de un sistema o

fenómeno del mundo real en el que se han simplificado u omitido algunos elementos para facilitar el aprendizaje” (p. 23).

## Marco conceptual

El modelamiento en la educación matemática permite que los estudiantes puedan aprender a: aplicar los conceptos en las situaciones de su mundo real, desarrollar estrategias para la solución de problemas y ser críticos en cuanto a planteamientos de otras personas. De acuerdo a Villa-Ochoa (2009), Basanezi (2002); Villa-Ochoa, (2007); Blum et ál, (2007), de modo general, la modelación puede surgir de un problema o situación del mundo real lo cual demanda actividades de simplificación y estructuración buscando una delimitación y precisión de la situación o problema.

Con la recolección de datos se provee más información sobre la situación y se sugiere el tipo de modelo matemático que puede ser apropiado para direccionar el problema del mundo real. A través de un proceso de matematización, los objetos relevantes, los datos, las relaciones, condiciones e hipótesis de la situación o problema en cuestión se integran resultando así un modelo matemático a través del cual se orienta el problema identificado. Para Blum y sus colaboradores, el proceso de modelación no finaliza con la obtención del modelo, sino que, por el contrario, se hace necesario usar algunos métodos y procedimientos matemáticos (hipótesis matemáticas, resultados teóricos, solución de ecuaciones, estimaciones numéricas, pruebas estadísticas, simulaciones, etc.) para obtener resultados matemáticos pertinentes con las preguntas derivadas de la traslación del problema del mundo real. Blum et ál. (2007) establecen que dichos resultados matemáticos deben ser traducidos nuevamente al contexto de donde fueron derivados para realizar un proceso de interpretación.

Finalmente, el “solucionador de problemas” valida el modelo mediante la comprobación de los resultados matemáticos y su interpretación como razonables y compatibles en términos de la información dada en el problema original. Cuando el proceso de validación arroje resultados no satisfactorios todo el proceso debe repetirse con una modificación o un modelo totalmente diferente. Por último (si se logra), la solución del problema original del mundo real, y cuando proceda, se comunicará a los demás.

El modelamiento puede apoyarse en la representación con herramientas computacionales; así podrá obtener mejores resultados y formas de interpretación. Por estas razones, es importante la mención de Múnera (2002) cuando se refiere al concepto de “representación” como gran complejidad, y admite diferentes posibilidades de interpretación; es ampliamente aceptada la acepción en la que se piensa

la representación como el acto a través del cual algo está en lugar de, o evocando a, otra cosa ausente. Kaput (1987a) propone que toda representación hace referencia a dos dominios claramente diferenciados e interrelacionados: el mundo representante (la representación, lo simbólico) y el mundo representado (el objeto, el concepto). También propone que la actividad representacional es intrínseca a la actividad matemática misma, dado que los objetos conceptuales son abstractos y no se puede acceder a ellos sino a través de sus representaciones. La actividad matemática misma es impensable por fuera de los sistemas utilizados en la representación. Aparece pues, una unidad indisoluble que plantea que los sistemas de representación “representan” los conceptos matemáticos, pero a su vez, los conceptos matemáticos se estructuran a partir de los sistemas de representación. Esta identidad hace que los sistemas de representación jueguen un papel fundamental en los procesos de aprendizaje de las matemáticas.

Adicionalmente, en el hacer matemático, la representación de unas estructuras por otras es una actividad natural y ha permitido enormes desarrollos a las matemáticas. Muestra de tal actividad representacional se puede ver en los morfismos, en los isomorfismos, en las construcciones algebraicas, en las representaciones geométricas, etc. Así pues, las experiencias de aula deben permitir al alumno construir significados a partir de la interacción con diversos sistemas de representación. Pero esta interacción no debe quedarse en el acto de traducir de un sistema a otro. Se debe posibilitar, en términos de Duval (1999), la coordinación entre sistemas de representación.

Esta coordinación debe entenderse como la posibilidad de identificar los elementos estructurales que, en un sistema de representación dado, están cumpliendo con la función de la representación, y ponerlos en relación con los elementos estructurales del otro sistema de representación. Así, se puede determinar cómo un sistema influye en el otro o viceversa, y cómo, en su conjunto, determinan la pluralidad de sentidos y significados para el o los conceptos matemáticos representados.

Rodríguez (2005) destaca la importancia de que algunos han dado al uso de herramientas computacionales en la formación matemática, tal como lo menciona Bishop (1989) una computadora ayuda al proceso de visualización, y que esta ha desempeñado un papel importante en los trabajos de investigación relativos a la visualización, con resultados positivos que parecen indicar que el poder generar y manipular imágenes en la computadora estimula las habilidades de visualización mental e incluso la comprensión de ideas algebraicas. Para Hitt (1995) la promoción de nuevas tecnologías en la enseñanza de las matemáticas permite hacer simulaciones y a través de ellas se construye un puente entre las ideas intuitivas de un alumno y los conceptos formales.

## Metodología

En la presente sección se describe con detalle la metodología y estrategias que se llevaron a cabo en el desarrollo del proyecto Red de Modelamiento y Representación Formal en Matemáticas; desde el punto de vista del desarrollo de competencias de modelamiento apoyado en herramientas computacionales. Se observará que en el desglose del mismo, se destaca el software MatLab de la empresa Mathworks, como aplicativo que soporta la categoría de argumentación; sin embargo, se utilizaron otras herramientas igual de importantes y que serán tratadas en el momento de requerirse.

### Condiciones previas a las actividades

La distribución de condiciones previas se llevó a cabo con algunas diferencias en las dos instituciones participantes.

Para el caso de la Universidad Central, el estudio de la representación computacional de los conceptos y los casos de experimentación fueron desarrollados en el software matemático MatLab; el cual se escogió ya que es un lenguaje de alto funcionamiento para computación técnica; este integra computación, visualización, y programación, en un entorno fácil de usar donde los problemas y las soluciones son expresados en la más familiar notación matemática. El trabajo en el área computacional de los casos se desarrolló en dos niveles académicos distintos:

1. En la asignatura matemáticas III de tercer semestre.
2. En la asignatura de Modelado y Simulación de quinto semestre.

Para el caso de la Universitaria de Investigación y Desarrollo – UDI se aplicó de la siguiente forma:

1. En la asignatura Matemáticas III de tercer semestre mediante el uso del software MatLab.
2. En la asignatura de Dinámica de sistemas de noveno semestre mediante la ejecución de simulaciones usando la hoja de cálculo del Google Drive.

Todas las asignaturas incluidas en la experimentación forman parte de los planes curriculares de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Central de Bogotá y de la Universitaria de Investigación y Desarrollo de Bucaramanga.

En las dos asignaturas se seleccionaron dos grupos paralelos, uno de la Universidad Central, ubicada en Bogotá, y otro de la Universitaria de Investi-



gación, de Bucaramanga. Las versiones computacionales de los casos fueron diseñados por los docentes responsables de las asignaturas, en concordancia con los contenidos programáticos de estas. Cada caso tiene versiones de trabajo correspondientes: verbales, algebraicas y diagramáticas previas a la ejecución del caso en la representación computacional. Un detalle a resaltar en el diseño de los casos es que las versiones computacionales están encadenadas con las versiones diagramáticas; en las que se trabajaban diagramas de procesos.

A continuación, se hace una descripción general de las partes relevantes de los documentos que contienen cada uno de los casos, y el cual es ilustrado en la figura 1.

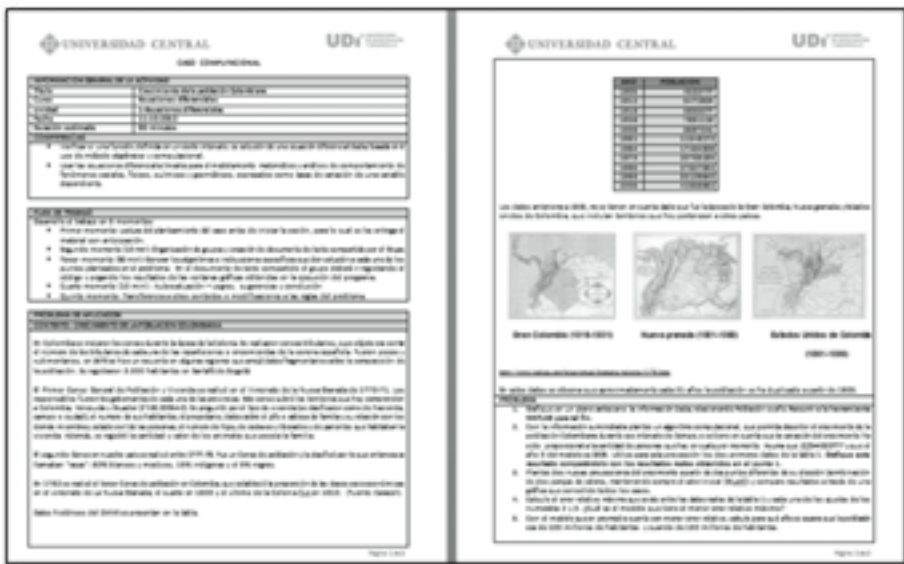


Figura 1. Ejemplo de caso presentado a los estudiantes

- **Información general de la actividad:** en esta sección del documento se especifica los detalles más generales del caos: nombre del caso, asignatura en la que se aplica el caso, temática del contenido programático de la asignatura que está relacionada con el caso, fecha de la sesión y duración estimada de la misma.
- **Competencias que se espera que el estudiante aprenda:** se listan las competencias mínimas que se espera que los estudiantes adquieran mediante el desarrollo del caso durante la sesión.
- **Plan de trabajo:** se describen los momentos en los que se divide la sesión y la duración de cada uno; a saber:

- Primer momento. Lectura del planteamiento del caso.
- Segundo momento. Desarrollo del caso utilizando el software MatLab.
- Tercer momento. Revisión del proceso y solución del caso por parte del docente.
- Cuarto momento. Autoevaluación-logros, dificultades, sugerencias y conclusión.
- Quinto momento. Transferencia a otros contextos del problema.
- **Contexto del caso de aplicación:** se describe la situación de la vida cotidiana en la que se enmarca el problema a solucionar en el caso.
- **Problema:** se enuncia la particularidad en la que el caso tiene lugar, así como las preguntas que deben ser contestadas por el estudiante.
- **Información adicional:** se agrega información adicional al contexto del problema, que es útil para la solución del problema propuesto.
- **Transferencia de la solución:** se listan uno o más cuestionamientos referentes a la temática del caso. Estos pretenden que el estudiante analice como la solución o simulación desarrollada en la sesión, podría usarse en otros contextos de aplicación.
- **Solución propuesta:** se plantea la solución computacional que el docente propone para el problema.

El objetivo principal del diseño de las versiones de casos computacionales es resaltar la importancia de la solución a problemas de todo tipo, que representa el uso de los computadores, mediante la simulación de sistemas, y el aprovechamiento de la capacidad de cálculo de estos. A su vez, cabe resaltar que los docentes que participaron en la experiencia poseen una buena cantidad de conocimientos en diseño de algoritmos, programación y la sintaxis usada en MatLab; además, antes de la implementación de las sesiones de trabajo computacional, se instruyó a los estudiantes en el manejo básico de MatLab (a través de dos sesiones tutoriales en cada universidad). En la tabla 1 se presentan la cantidad de estudiantes por asignatura, el cual es una variable de interés para el análisis.

**Tabla 1.** Información general de las pruebas

Institución	Asignatura	Cantidad de estudiantes participantes
UNIVERSIDAD CENTRAL	MODELAMIENTO Y SIMULACIÓN	20
UNIVERSIDAD CENTRAL	MATEMÁTICAS III, GRUPO 1	21
UNIVERSIDAD CENTRAL	MATEMÁTICAS III, GRUPO 2	21
UDI	DINÁMICA DE SISTEMAS	35
UDI	MATEMÁTICAS III	25

## Procedimiento ejecutado

La implementación de las versiones computacionales de los casos de experimentación se describe a continuación:

- **Universidad Central**

**Modelamiento y Simulación:** en M&S se implementó la metodología de casos del proyecto en el grupo 1.6 dirigido por el docente Albert Montenegro. Se trabajaron 3 casos en versión computacional durante el semestre, los cuales son presentados en la tabla 2

**Tabla 2.** Relación de casos Universidad Central M&S

Número	Nombre del caso	Temática relacionada con el caso	Cantidad de estudiantes participantes
1	Semáforo	Errores de máquina	18
2	Poblaciones	Método de Euler y regresión lineal	17
3	Transmilenio	Teoría de colas	20

**Matemáticas III:** en Matemáticas III se implementó la metodología de casos del proyecto en dos grupos. En el grupo 1 y grupo 2 se trabajó un caso en versión computacional, el cual se relaciona en la tabla 3.

**Tabla 3.** Relación de casos Universidad Central Matemáticas III- Grupo 1

Número	Nombre del caso	Temática relacionada con el caso	Cantidad de estudiantes participantes
1	Euler	Resolución numérica de ecuaciones diferenciales	21 (grupo 1) 18 (grupo 2)

- **Universitaria de Investigación y Desarrollo (UDI)**

Matemáticas III: en Matemáticas III se implementó la metodología de casos del proyecto en un grupo (tabla 21).

**Tabla 4.** Relación de casos UDI - Matemáticas III

Número	Nombre del caso	Temática relacionada con el caso	Cantidad de estudiantes participantes
1	Análisis poblacional	Ecuaciones diferenciales de primer orden	25

En cada sesión, después que el docente del curso compartía el enunciado del caso, los estudiantes trabajaban de manera individual en el software Mat-Lab, con el fin de desarrollar la solución del problema propuesto. El docente monitoreaba el progreso de los estudiantes y eventualmente socializaba conceptos claves que pretendían guiar a los estudiantes hacia la solución.

La última parte de las sesiones se invertían en hacer la retroalimentación de la solución del problema propuesto y recolectar las soluciones realizadas por los estudiantes para su posterior análisis y evaluación.

Dinámica de sistemas: durante la fase de experimentación del proyecto, con el curso de Dinámica de Sistemas se utilizaron los casos de la tabla 22 en la representación computacional.

**Tabla 5.** Relación de casos UDI –Dinámica de sistemas

Número	Nombre del caso	Temática relacionada con el caso	Cantidad de estudiantes participantes
1	Computación en la nube	Modelamiento cuantitativo	35
2	Papel o plástico	Modelamiento cuantitativo	35

En la UDI, el planteamiento los casos eran entregados con al menos cuatro días de anticipación para que los estudiantes tuvieran tiempo de leerlos, comprenderlos y buscar documentación adicional. Para las sesiones en las que los estudiantes debían implementar el modelo matemático para su simulación por computador, trabajaron en grupos de 4 o 5 estudiantes, utilizando la hoja de cálculo de la plataforma Google Drive, cada uno desde un computador distinto, evitando estar en puestos adyacente para evitar que durante la discusión del caso tuvieran comunicación oral y recurrieran a la comunicación escrita por medio del chat incluido en la herramienta.

La simulación por computador ha sido el principal objetivo del modelamiento con Dinámica de Sistemas, especialmente en la línea ortodoxa. Existe

variedad de herramientas software para este propósito, pero se puede llevar a cabo con herramientas de propósito general como las hojas de cálculo.

## Análisis de datos y resultados

Se diseñó una plantilla para medir cuantitativamente las habilidades en el área computacional de los estudiantes. Dicha plantilla representa separadamente las partes fundamentales de un programa, a saber:

- Definición de variables claves.
- Sentencias de asignación.
- Estructuras de decisión.
- Estructuras repetitivas.
- Sentencias de salida: textuales o gráficas.

La plantilla de evaluación compara la solución propuesta del docente contra la solución propuesta de cada estudiante, medida en cada una de las partes fundamentales antes mencionadas.

Puesto que en algunos casos se solicitó a los estudiantes comentar líneas de código, con la pretensión de medir su conocimiento de la sintaxis y la semántica del software, se incorporó en la plantilla para dichos casos la medición de los números de líneas principales descritas de manera adecuada.

La plantilla usa una variable principal que resume y combina los valores cuantitativos en un índice, que pretende medir qué tan acertado es el uso de la herramienta computacional que hace el estudiante para modelar el problema. Se dio el nombre de “eficacia” a la variable que contiene este índice. La eficacia se definió como sigue: “índice de validez=número de procesos válidos del estudiante/número de procesos propuestos por el experto”.

Por la definición anterior, debe enfatizarse que el valor de la “validez” está en el intervalo  $[0,1]$ , donde validez 0 indica que el estudiante no realiza ninguna de las partes del modelo computacional de manera adecuada y la validez 1 indica que el estudiante propuso un modelo computacional igual o similar al que el experto planteó.

### **Plantilla de evaluación**

A continuación, se describen detalladamente las variables que forman la plantilla general de evaluación de la competencia de modelado computacional, la cual se aplicó a los programas generados por los estudiantes durante las sesiones de clase (tabla 6).

**Tabla 6.** Descripción de variables utilizadas en la plantilla de evaluación del modelo computacional

Identificador	Descripción
L	Número total de líneas a comentar según el experto.
LC	Número de líneas a comentadas adecuadamente por el estudiante.
VE	Número de variables de entrada propuesto por el experto.
VEC	Número de variables de entrada claves propuesto por el estudiante.
SA	Número de estructuras de asignación propuesto por el experto.
SAC	Número de estructuras de asignación claves propuestas por el estudiante.
SD	Número de estructuras de decisión propuestas por el experto.
SDC	Número de estructuras de decisión claves propuestas por el estudiante.
SC	Número de estructuras repetitivas propuestas por el experto.
SCC	Número de estructuras repetitivas claves propuestas por el estudiante.
SG	Número de sentencias de salida gráfica propuestas por el experto.
SGC	Número de sentencias de salida gráfica propuestas por el estudiante.
S	Número de sentencias de salida textual propuestas por el experto.
SC	Número de sentencias de salida textual propuestas por el estudiante.
IE	Indicador de validez total, corresponde a la relación entre la sumatoria de los éxitos del estudiante sobre el total de respuestas solicitadas por el docente. Este parámetro es cuantificado así: En esta figura de mérito, el estudiante con todas las respuesta correctas del caso, en las diferentes categorías, obtendrá un IE=1. A medida que el valor dista de 1 el resultado es más deficiente.

Una sentencia o estructura de programación se considera “clave”, si la falta de esta hace que el programa no genere los resultados requeridos. La tabla 7 muestra una de las plantillas ya tabuladas:

**Tabla 7.** Ejemplo de tabulación de datos del modelo computacional

Estudiante	Total líneas a comentar por el experto	Total líneas comentadas por el estudiante	Total variables de entrada por el experto	Variables de entrada claves por el estudiante	Total estructuras de asignación propuestas por el experto	Estructuras de asignación claves por el estudiante	Total estructuras de decisión por el experto	Estructuras de decisión claves por el estudiante	Total estructuras repetitivas por el experto	Estructuras repetitivas claves por el estudiante	Total sentencias de salida gráfica por el experto	Total sentencias de salida gráfica por el estudiante	Total sentencias de salida textual por el experto	Total sentencias de salida textual por el estudiante	Indicador de eficacia
1	15	11	2	2	2	2	0	0	0	0	1	1	1	1	0.91
2	15	13	2	2	2	2	0	0	0	0	1	1	1	1	0.96
3	15	12	2	2	2	2	0	0	0	0	1	1	1	1	0.93
4	15	13	2	0	2	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0.29
5	15	15	2	2	2	2	0	0	0	0	1	1	1	1	1.00
6	15	13	2	2	2	2	0	0	0	0	1	1	1	1	0.96
7	15	12	2	0	2	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0.27
8	15	11	2	0	2	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0.24
9	15	8	2	0	2	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0.18
10	15	2	2	0	2	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0.04
11	15	9	2	0	2	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0.20
12	15	12	2	0	2	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0.27
13	15	10	2	0	2	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0.22
14	15	12	2	0	2	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0.27
15	15	4	2	0	2	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0.09
16	15	0	2	0	2	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0.00
17	15	0	2	0	2	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0.00
18	15	0	2	0	2	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0.00

## Análisis de resultados

El interés principal de la evaluación mediante la plantilla es medir en qué porcentaje el estudiante realizó un modelo computacional cercano a la solución proporcionada por el experto docente, a través de la combinación de las partes fundamentales del programa.

En cada una de los casos se hizo un estudio descriptivo de los datos de la variable “validez”, para tener una idea general del nivel de conocimientos en programación de los estudiantes, pues este indicador sintetiza cada uno de los componentes analizados en el programa. La tabla 8 muestra las medias y desviaciones estándar de esta variable en los diferentes cursos.

**Tabla 8.** Medias y desviaciones estándar para la variable “validez” en la simulación para los diferentes cursos.

Universidad	Curso	Media	Desviación estándar
Central	Modelamiento y Simulación	0,26	0,16
Central	Mat III	0,48	0,17
UDI	Dinámica de Sistemas	0,25	0,16
UDI	Mat III	0,33	0,40
Promedio		0,35	0,24

Luego se estudió la relación estadística entre la “validez”, como variable independiente, y la nota obtenida en el examen final escrito o examen del corte 3, como variable dependiente. La herramienta estadística que se uso fue la regresión lineal.

El análisis se muestra de forma independiente para cada una de las asignaturas involucradas, pues se considera que las condiciones de los grupos experimentales fueron diferentes en términos de los casos aplicados y de las herramientas computacionales utilizadas.

**Modelamiento y Simulación - Universidad Central.** Las medias de “validez” para los tres casos fueron: 0,25, 0,36 y 0,17, para un promedio de 0,26. Como se puede observar, los promedios de “validez” son notoriamente bajos. Esto quiere decir que los estudiantes tuvieron pocos aciertos comparados con el desarrollo de los programas en MatLab, los cuales fueron elaborados para solucionar los problemas de los tres casos que se les presentaron a lo largo del curso. Se esperaría, en una situación esperada que los promedios estuvieran por encima de 0,5.

La tabla 9 muestra las correlaciones estadísticas entre la “validez” en cada uno de los casos y las calificaciones en los exámenes posteriores. Las correla-



ciones entre “validez” en la solución de los casos y las notas en el examen que siguió a la solución del caso no son significativas. Tampoco hay relación significativa con las notas de las evaluaciones posteriores.

**Tabla 9.** Tabla de correlaciones entre “validez” y calificaciones

	NOTA1	NOTA2	NOTA3
VALIDEZ CASO 1	0,43	-0,18	-0,04
VALIDEZ2		0,18	0,17
VALIDEZ3			0,24

La validez computacional promedio en los casos de la asignatura de Modelamiento y simulación en la Universidad Central son bajos, lo que muestra las deficiencias en programación de los estudiantes. Por otro lado, no hay evidencia estadísticamente significativa que relacione la validez con la nota del examen escrito en ninguno de los casos.

**Matemáticas III - Universidad Central.** La tabla 8 muestra la media y desviación estándar correspondientes a este curso. La media de 0.48 y la desviación de 0.17 muestran el rendimiento más alto en el conjunto de los cursos con los cuales se experimentó. Sin embargo, no se supera el nivel del 0.5 y se ubica como rendimiento bajo. Y muestra “validez” en programación de los estudiantes. Por otro lado, no hay una correlación significativa de la validez con las evaluaciones del curso.

**Dinámica de Sistemas, Universitaria de Investigación y Desarrollo (UDI).** Las estadísticas que describen la validez (tabla 8) muestran un nivel de “validez” de 0.25, valor definitivamente bajo. En consecuencia, la correlación con el rendimiento en el examen final no es significativa ( $r=0.184$ ).

Las deficiencias de los estudiantes en sus competencias de programación son evidentes. Un análisis más específico de las soluciones planteadas muestra que proponen correctamente las ecuaciones diferenciales asociadas a los niveles del modelado en dinámica de sistemas, que se caracterizan por la forma de Euler, pero se les dificulta la formulación de las ecuaciones auxiliares cuyos modelos matemáticos están relacionados con representaciones algebraicas, geométricas o de otro tipo y fallan en la consistencia entre las unidades de medida, lo que al final genera un programa computacional que aunque funciona, no proporciona los resultados matemáticamente adecuados.

Esto denota problemas directamente relacionados con el modelamiento algebraico de la solución, que posteriormente se reflejan en un modelamiento computacional deficiente.

Por otro lado, no hay evidencia estadísticamente significativa que relacione la validez con la nota obtenida en el examen final o examen del corte 3, lo que indica que el desempeño en la solución de problemas mediante la representación computacional no es un predictor de la nota obtenida en el examen final.

**Matemáticas III - Universitaria de Investigación y Desarrollo UDI.** Una media de 0.33 y una desviación estándar de 0.40 muestran un bajo nivel de validez y una gran dispersión de los datos. La correlación entre validez y resultados en el examen final es de 0,34794, no significativa.

Hay que tener en cuenta que no hay evidencia estadística que relacione la validez con la nota obtenida en el examen final o examen del corte 3, lo que indica que el desempeño en la solución de problemas mediante la representación computacional no es un predictor de la nota obtenida en el examen final.

## Análisis particular del caso Modelamiento y Simulación

La asignatura de la que se tienen datos suficientes para hacer un estudio más profundo de las posibles relaciones entre la validez de los casos y las notas que los estudiantes obtuvieron a lo largo del semestre es Modelamiento y Simulación de la Universidad Central.

A continuación, se mostrarán los resultados que se obtuvieron al ejecutar un análisis de regresión lineal múltiple entre la validez, medidas en los casos y las notas obtenidas por los estudiantes (tabla 10). Los valores de F no alcanzan a mostrar una relación significativa entre las parejas de variables. Los pesos beta de las dos variables independientes no muestran efecto significativo sobre la variable dependiente.

**Tabla 10.** Tabla de valores beta, t y p obtenidos en el análisis de regresión en el curso de Modelamiento y Simulación

Variable Independiente	Variable dependiente	Beta	T	P
validez CASO1	Nota al 30%	0,426074	1,88385	0,077890
validez CASO1	Nota al 60%	-0,329024	-1,20265	0,247753
validez CASO2	Nota al 60%	0,332537	1,21549	0,242964
validez A CASO1	Examen final	-0,137120	-0,476252	0,641242
validez A CASO2	Examen final	0,189399	0,648291	0,527288
validez CASO3	Examen final	0,216012	0,832174	0,419280

## Conclusiones

Se presentaron diferencias importantes entre los cuatro escenarios de experimentación; es decir, entre los cursos de Matemáticas III, de Modelamiento y Simulación y de Dinámica de Sistemas. No obstante, el estudio estadístico individual de la validez muestra que en ninguno de los escenarios, los estudiantes mostraron un nivel adecuado de habilidades para implementación de programas de computador. Esta situación se evidencia a partir de la variable validez en la representación computacional, la cual tiene valores muy bajos. Esta especie de efecto piso explica la baja relación con las calificaciones del examen final. Probablemente, la relación se daría si las habilidades para desarrollar simulaciones con el uso del lenguaje de computador estuvieran más desarrolladas.

Los docentes de las asignaturas indican algunas dificultades adicionales que se presentaron en las sesiones computacionales de los casos, que probablemente impidieron el desarrollo de competencias en modelado computacional, como:

- Los laboratorios de cómputo no estaban a disposición en algunas de las sesiones o se presentaron problemas de red.
- La habilidad en programación de algunos docentes no era suficiente para hacer un acompañamiento adecuado a los estudiantes.
- El conocimiento básico de los estudiantes sobre las herramientas computacionales utilizadas en el proceso de programación no fue el adecuado, y el entrenamiento proporcionado no fue suficiente para lograr una competencia tecnológica mínima, lo que se reflejaba en continuas preguntas sobre la sintaxis en algunas instrucciones, que se suponían ya conocidas.
- En algunos casos la deficiencia de las soluciones planteadas en lo computacional están relacionadas con un desempeño insuficiente en el modelamiento desde lo algebraico y por ende es necesario enfatizar en este componente del modelamiento matemático.

## Sugerencias

La utilidad de las simulaciones en computador es reconocida en los escenarios de la ingeniería, de tal manera que difícilmente se encuentran posiciones que la rechacen. Sin embargo, también es reconocida la dificultad que implica adquirir la competencia para programar en lenguajes de computador. En nuestro enfoque, la representación en lenguaje de computador de las soluciones a problemas tiene un valor especial para habilitar la transferencia de soluciones

entre contextos. Animados por estas motivaciones presentamos algunas sugerencias para la implementación de metodologías similares a las implementadas en el proyecto que podrían mejorar la adquisición de competencias de representación computacional:

- Asegurar la disponibilidad y calidad de los espacios físicos para el desarrollo de las sesiones.
- Capacitar a los docentes en el manejo de las herramientas de computación utilizadas en el proyecto.
- Beneficiar a los estudiantes con la adquisición temprana de habilidades de programación. En consecuencia, se sugiere que se forme a los estudiantes en programación desde el primer semestre de sus carreras universitarias para que este tipo de metodologías puedan ser implementadas en cursos de semestre bajos y la programación se convierta en estrategia de investigación y aprendizaje.
- Adicionar a los contenidos programáticos de todas las asignaturas relacionadas con modelamiento un componente de programación para incrementar paulatinamente las competencias de los estudiantes en el modelado computacional.
- Desarrollar pilotajes previos de los casos con un grupo de estudiantes, con el fin de afinarlos en complejidad y longitud, para que estén acordes con el tiempo disponible y las habilidades de programación promedio.
- Incluir en los casos sugerencias de revisión de estructuras y procesos computacionales específicos en el lenguaje que se esté usando. De esta manera, se induce el estudio y aplicación de la programación a los problemas específicos.

## Referencias

- Duarte, C. E.; Lozano, O. A. y Andrade, H. (2000). *HOMOS 1.0 Herramienta Software para el Modelamiento y Simulación Basado en Objetos y Reglas*. Colombia.
- Durán, E., Costaguta, R., Gola, M. (2011). *El modelo B-learning implementado en la asignatura simulación*. RIED. *Revista Iberoamericana de Educación a Distancia*, 14 (2): 149-166.

- Hilera, J. R. y Palomar, D. (2005, abril). *Modelado de procesos de enseñanza-aprendizaje reutilizables con XML, UML e IMS-LD*. Publicación en línea. Murcia (España). Año IV. Número monográfico III.
- Kadijevich, Dj., Haapasalo, L. y Hvorecky, J. (2005). *Using Technology in Applications and Modelling. Teaching Mathematics and its Applications*, 24(2-3): 114-122.
- Kofman, H. A. (2000). *Modelos y simulaciones computacionales en la enseñanza de la física. Revista Educación en Física*, 6: 13-22.
- López, M. V., Mariño, S. I., Pace, G. J., Petris, R. H. (2000). *Desarrollo de modelos de Simulación en Matemática. LPM -Laboratorio de Programación Multimedial- Departamento de Informática*. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales y Agrimensura -UNNE. Comunicaciones Científicas y Tecnológicas 2000.
- López, María V., Mariño, S. I. (2004). *Desarrollo de software como estrategia para afianzar el aprendizaje en la asignatura. "Modelos y simulación"*. Universidad Nacional del Nordeste. Comunicaciones Científicas y Tecnológicas. Argentina.
- Mariño, S. I. y López, M. V. (2007, julio). *Aplicación del modelo b-learning en la asignatura. "Modelos y Simulación" de las carreras de Sistemas de la Facena- UNNE*. Departamento de Informática. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales y Agrimensura.
- Mendible, A. y Ortiz, J. (2007). *Modelización matemática en la formación de ingenieros. La importancia del contexto. Enseñanza de la Matemática*, Vols. 12 150 al 16; N.º Extraordinario; 2003 - 2007, pp. 133-150.
- Palmeros, A. G. (2005). *Innovación y mejoramiento de la cultura de trabajo, en el marco de las organizaciones que aprenden. Revista perspectivas Docentes*, 31: 31-38. Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.
- Mariño, S. I. López, M. V. y Vanderland, M. de los Á. (2007). *Construcción de simuladores como una Instancia de evaluación formativa en la asignatura modelos y simulación de la carrera de sistemas*.
- Trigueros Gaisman, M. (2009, enero-marzo). *El uso de la modelación en la enseñanza de las matemáticas*. Innovación Educativa, 9 (46): 75-87.



## Capítulo 9



# Comunidad web 2.0 para el desarrollo de competencias matemáticas

Caso: proyecto “Red de Modelamiento  
y Representación Formal en Matemáticas”

---

Adriana Rocío Lizcano Dallos\*

Dora Janeth Alfonso\*\*

César Quintero\*\*\*

Wilfredo Ariel Gómez\*\*\*\*

### Introducción

**E**n este capítulo se relacionan los principales elementos que se tuvieron en cuenta para el diseño, implementación y prueba del sitio web 2.0 que sirvió de soporte a los procesos de experimentación desarrollados mediante la aplicación de casos de estudio en las asignaturas seleccionadas para el proyecto “Red de Modelamiento y Representación Formal en Matemáticas”.

El capítulo presenta, en la sección de antecedentes, la reseña de algunas comunidades que han tenido éxito en el uso de las herramientas tecnológicas, específicamente en el aprendizaje de la matemática, y que sirvieron como fundamento para la conformación de la comunidad web 2.0 del proyecto. Posteriormente se describen los aspectos más relevantes del diseño y uso de la comunidad web 2.0,

---

\* M Sc. y docente investigadora de Universitaria de Investigación y Desarrollo UDI. Grupo de investigación Gidsaw.

\*\* M Sc. y docente investigadora de la Universidad Central.

\*\*\* Estudiante de Ingeniería de Sistemas, Universidad Central.

\*\*\*\* Estudiante de Ingeniería de Sistemas, Universitaria de Investigación y Desarrollo.

así como el procedimiento y los resultados obtenidos en la ejecución de una prueba piloto con estudiantes. Finalmente se realiza la propuesta de una metodología pedagógica que incluye un conjunto de fases y actividades para la incorporación de este tipo de herramientas tecnológicas en procesos de aprendizaje.

## Antecedentes

### **Comunidades de aprendizaje en matemáticas**

Una comunidad de aprendizaje es un grupo de personas que comparte el interés en un dominio de conocimiento particular que las motiva a socializar métodos, enseñanzas, ideas, material y recursos de conocimiento con el propósito de que entre todas aumenten su entendimiento sobre temas específicos. Según lo reseñan Lardner y Malnarich (2008), en Estados Unidos la inclusión de comunidades de aprendizaje en las instituciones educativas tradicionales motivó a los estudiantes de diversas entidades a compartir conocimiento e ideas sobre las áreas de saber propuestas, a la vez que produjo una mejor coherencia curricular, mayor integración entre asignaturas, alta calidad en el aprendizaje y construcción de conocimiento colaborativo y de habilidades y conocimientos relevantes para subsistir en un mundo complejo y diverso.

En el área de las ciencias básicas, y más concretamente en lo que concierne a las matemáticas, se han desarrollado diversos estudios cuyo objetivo es involucrar a los estudiantes en comunidades de aprendizaje con el propósito de aumentar el grado de retención de conocimientos. Por ejemplo, el trabajo de Smith et ál. (2008) muestra una comunidad de aprendizaje en la Universidad de Howard diseñada para que los estudiantes pudieran generar habilidades en la enseñanza y entendimiento de las disciplinas concernientes a ciencias básicas, ingeniería, física y matemática con el fin de acceder a una beca. De acuerdo con los resultados de ese proyecto, se concluye que las comunidades de aprendizaje son mecanismos efectivos para mejorar las habilidades tanto de aprendizaje como de enseñanza.

De igual manera, Majid et ál. (2007) exponen los resultados de un estudio en la Universidad de Santi, en Malasia, que tenía como objetivo incrementar el aprendizaje de estudiantes inscritos en cursos a distancia de matemáticas y física. En el estudio se concluye que, aunque la inclusión de las comunidades de aprendizaje basta para incrementar el nivel de retención de conocimiento de los estudiantes, la inserción de un docente (encargado de gestionar las citas, proyectos y materiales) potencia los resultados de las mismas.



En Canadá, se ha realizado un esfuerzo por organizar comunidades de aprendizaje para la enseñanza de temas multidisciplinarios, tomando las matemáticas como eje principal. Se usan tecnologías de la información para poder ofrecer a los involucrados acceso a los recursos de conocimiento en períodos determinados, a la vez que mejorar la integración de las ciencias básicas con las ciencias aplicadas en la solución de problemas tecnológicos (Freiman y Lirrette-Pitre, 2009).

El trabajo realizado por Robutti (2010) en la Universidad de Torino, en Italia, muestra cómo las comunidades pueden centrarse en el aprendizaje de las matemáticas a través de artefactos que sirven de enlace para la socialización y transferencia de conocimiento. Este estudio utiliza como eje socializador el uso de calculadoras científicas y de software de conectividad con el propósito de enlazar a los estudiantes que comparten los resultados obtenidos en laboratorios de matemáticas.

El proyecto de Bottino y Kynigos (2009) fue desarrollado para la inclusión de comunidades de aprendizaje digitales de grupos de investigación en matemáticas en la Unión Europea. El propósito fue la creación de un lenguaje compartido, tanto explícito como implícito, que facilitara la transferencia de conocimiento entre los centros de investigación, y que permitiera agilizar las investigaciones realizadas y potenciara los resultados de las mismas.

### **Fortalecimiento del aprendizaje de las matemáticas por medio de la web 2.0**

El gusto de los jóvenes por la tecnología facilita el uso de las herramientas de las TIC y de la web 2.0 en la enseñanza de las matemáticas, pues despierta en los estudiantes mayor interés por los contenidos al sentirse en espacios que son cotidianos para ellos.

Mediante el uso de una web 2.0 para el aprendizaje de las matemáticas, el estudiante puede acceder a los contenidos de las asignaturas, consultar ejercicios resueltos por medio de archivos multimedia y participar en foros, wikis y blog. De igual manera, el profesor puede optimizar los tiempos para la ejecución de tareas y verificar en línea, cada vez que lo desee, el trabajo de los estudiantes. Todo esto disminuye los costos en materiales.

Para que la plataforma web 2.0 sea eficiente y proporcione resultados positivos, el profesor debe tener una actitud positiva frente a esta forma de enseñar, utilizar una metodología que esté en constante cambio e innovación, actualizarse continuamente en el uso de las TIC y observar los resultados en el aprendizaje de los estudiantes. Como complemento, se recomienda establecer una

continua comunicación entre el profesor y el estudiante mediante el uso del correo electrónico.

En lo relacionado con la incorporación de las nuevas tecnologías, en el proyecto se plantearon dos fases:

1. Búsqueda de *software* matemático que facilitara la solución de los problemas y contribuyera a la preparación de las clases con teorías, prácticas y procesos de evaluación.
2. Elaboración de la comunidad web 2.0, mediante la incorporación de los conceptos previos, temas, autoevaluaciones, multimedias y herramientas de participación y de gestión de calificaciones. En la comunidad web 2.0, los profesores, con capacitación previa del uso de la web, deberán subir los contenidos tanto estáticos como de conceptos previos y propios de la asignatura.

El objetivo del proyecto fue lograr una mayor compatibilidad entre el uso de las TIC y la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas mediante una plataforma web 2.0 que tuviera una interfaz de fácil uso para profesores y estudiantes.

Algunos ejemplos similares al desarrollo de la plataforma web de comunidad web 2.0 de este proyecto son los presentados por González et ál. (2006) y Martínez y Calao (2012).

González et ál. (2006) presentan el desarrollo del programa *Tarima*, que permite preparar, presentar y revisar evaluaciones, ver calificaciones y controlar asistencia. Para elaborar este programa, primero seleccionaron las teorías y las prácticas de la clase, y luego informaron sobre el proceso de evaluación a los estudiantes. La idea principal de este programa es hacer seguimiento y evaluaciones constantes mediante exámenes diseñados como formularios web en los que se presenta la pregunta, el enunciado, la resolución detallada del problema y las opciones de respuesta. Una vez que el estudiante seleccione la respuesta, el programa pasa a la siguiente pregunta; para resolver las preguntas, los estudiantes cuentan con el apoyo del software *Mathematica*, previamente seleccionado por ser el más acorde con las teorías y las prácticas de la asignatura.

El examen debe estar supervisado por el profesor, y las calificaciones se muestran tan pronto se termina de solucionar las preguntas. El programa dirige al estudiante a la zona de revisión donde puede ver la solución de cada pregunta, y conocer y estudiar el ejercicio. El estudiante también puede acceder a un historial personal sobre las notas y asistencia a clases y así saber qué tanto ha mejorado.

Martínez y Calao (2012) plantean el desarrollo de la plataforma web *VirtualMates*, que pretende que los estudiantes interactúen y desarrollen prácticas matemáticas mediante el uso del simulador *Maple*, el uso de *blogs*, *wikis*, la implementación de *webquest* y el acceso a contenidos estáticos relacionados con el desarrollo de la asignatura. De igual manera, proponen una metodología de trabajo en la *web* que incluye *blogs* de contenido multimedia donde se publiquen videos informativos sobre los temas de la asignatura, enlaces a otras *web*, programación de actividades grupales para el uso de las *wikis*, uso de *e-mail* para la comunicación continua entre profesor y estudiantes y fomento del uso de internet como fuente de información.

## Propuesta de comunidad web 2.0

En la actualidad, es difícil imaginarse el mundo sin el uso de sistemas electrónicos para todo tipo de comunicación: basta con tomarse un tiempo para observar la cantidad de personas que al escuchar el timbre de su celular, buscan rápidamente en su bolsillo el equipo para contestar una llamada que quizás esté equivocada o tal vez represente el inicio de un negocio rentable.

Tim Berners y Robert Cailliau crearon hacia 1990 la *web*, que ha experimentado una evolución extraordinaria; en particular, cabe anotar que en 2004 se introdujo el concepto de *web 2.0* como fruto de esta evolución.

Antes de la llegada de las tecnologías de la *web 2.0* se utilizaban páginas estáticas programadas en *HTML (Hyper Text Markup Language)* que no eran actualizadas continuamente. El éxito de las *.com* dependía de *web* más dinámicas (a veces llamadas *Web 1.5*) en las que los sistemas de gestión de contenidos servían páginas *HTML* dinámicas creadas al vuelo desde una base de datos actualizada. En ambos sentidos, conseguir visitas (*hits*) y proyectar una estética en la presentación de sus elementos eran considerados los factores claves para el impacto de la página *web*.

Los teóricos de la aproximación a la *web 2.0* piensan que su uso está orientado a la interacción y a las redes sociales, y a la presentación de contenido que aproveche los impactos de estas redes mediante la creación de *web* interactivas. Es decir, los sitios *web 2.0*, a diferencia de las *web* tradicionales, actúan más como puntos de encuentro o *web* dependientes de usuarios.

Una comunidad *web 2.0* se puede definir como un espacio colaborativo en internet que crece y se desarrolla con los aportes de sus miembros sobre áreas temáticas de interés común. Estas comunidades se caracterizan por el uso de las TIC, pero la importancia de las mismas no reside en la infraestructura tecnológica, sino en la sinergia colaborativa generada por el uso de las mismas,

ya sea desde computadores de escritorio, tabletas o *smartphones* que amplían el panorama de posibilidades para compartir y difundir información. Este espacio puede ser público o privado, según las necesidades que tenga la comunidad o la temática que se aborde.

En relación con el proyecto “Red de Modelamiento y Representación Formal en Matemáticas”, debe recordarse que su objetivo fue la creación de un espacio virtual a través de la infraestructura de Renata, que permitiera la incorporación de material en diferentes formatos (texto, audio y video), herramientas como *blog*, *wiki*, *webcast*, la construcción colaborativa de conocimiento y la administración de portafolios de evidencias de aprendizaje. Este espacio servirá como repositorio de recursos digitales y de soporte para una red de interés sobre la formación de competencias de modelamiento en ámbitos universitarios. Adicionalmente existe la posibilidad de que la comunidad y los recursos crezcan mediante la vinculación de nuevos interesados en dicho proceso y la generación de grandes beneficios a corto y mediano plazo para las entidades educativas participantes.

## **Análisis y diseño de la comunidad web 2.0**

De acuerdo con Argüello (2013), en el diseño de comunidades virtuales se debe tener en cuenta lo siguiente:

1. Facilitar la contribución de los participantes y confiar en las intervenciones de cada uno de ellos.
2. Permitir que la base de conocimiento de los participantes evolucione de acuerdo con el cambio en procesos y conceptos.
3. Permitir que el integrante sea conocido y valorar sus contribuciones.
4. Permitir a los miembros de la comunidad evaluar y responder las contribuciones de otros participantes.

A continuación se describe, según el estándar IEEE-STD-830-1998, las especificaciones técnicas de *software* y de diseño, así como las de documentación de análisis de la comunidad 2.0 del proyecto.

### ***Características técnicas***

La comunidad 2.0 se desarrolla en lenguajes de programación web, utilizando PHP y administrador de bases de datos MySQL y apoyándose en una herramienta de gestión de contenidos CMS (como *Joomla*). Para el diseño, se establece una plantilla que garantice la uniformidad y una estructura en tipografía utilizando CSS.

### ***Alcance***

La comunidad 2.0 está orientada a investigadores involucrados en las áreas de modelamiento y representación formal en matemáticas, y de nuevas tecnologías para la educación.

También está orientada a estudiantes y docentes de instituciones de educación superior que deseen apoyar sus cursos utilizando la metodología basada en casos, problemas y proyectos, específicamente en el área de las matemáticas.

### ***Resumen***

Toda la información producida en el proceso de experimentación se pone a disposición de la comunidad de Renata mediante una plataforma basada en el concepto de web 2.0, que se implementa en las universidades. La plataforma sirve como repositorio de recursos digitales y de soporte para una red de interés sobre la formación de competencias de modelamiento en escenarios universitarios, con la posibilidad de que la comunidad y los recursos crezcan mediante la vinculación de interesados en el proceso.

### ***Funcionalidad del producto***

La comunidad del proyecto Renata 2 permite:

- La discusión de casos, problemas, proyectos y demás formulaciones propuestos por los docentes como apoyo al desarrollo de las asignaturas.
- La categorización de roles (estudiantes, docentes e investigadores) organizados por proyectos o casos que incluyen mapas, ecuaciones, esquemas, con complementos de texto (tipo *blog*) o de audio y video (tipo *webcast*).
- La producción de la comunidad de docentes en forma de unidades didácticas validadas.
- La interacción entre los diferentes roles por medio de las herramientas de la web 2.0
- El almacenamiento y la disponibilidad de documentos producidos en el desarrollo de casos, problemas y proyectos a cargo de los estudiantes.

### ***Roles finales***

En la tabla 1 se muestran tanto los roles que se incorporan en la plataforma como las acciones que podrá realizar cada uno.

**Tabla 1.** Roles que se incorporan en la plataforma

Administrador	Investigador	Docente	Estudiante
Registrar usuarios Hacer copias de seguridad Registrar y eliminar <ul style="list-style-type: none"> <li>• Usuarios</li> <li>• Asignaturas</li> <li>• Programas</li> <li>• Instituciones</li> </ul> Crear y organizar el foro	Registrar docente Eliminar docente Subir artículos Eliminar artículos Consultar docente Consultar estudiante	Catalogar cursos Invitar estudiante Aprobar ingreso estudiante Diseñar ejercicios <ul style="list-style-type: none"> <li>• Determinar tema</li> <li>• Catalogar ejercicios</li> <li>• Asignar baterías</li> <li>• Asignar visibilidad</li> </ul> Asignar ejercicios Configurar grupo Asociar las baterías Hacer seguimiento Retroalimentación <ul style="list-style-type: none"> <li>• Revisión evaluación</li> <li>• Publicar retroalimentación</li> </ul>	Registrarse Acceder a ejercicios Enviar resoluciones Construir blogs Escribir comentarios

### **Restricciones**

La web 2.0 está disponible solo para los usuarios que se registran en la página *web 2.0* del proyecto “Red de Modelamiento y Representación Formal en Matemáticas”. De acuerdo con el rol asignado en el momento de la inscripción, el sistema asignará los privilegios de usuario final.

Adicional al desarrollo de la comunidad 2.0 del proyecto, se elaboró un plan para su socialización que estuvo integrado por dos procesos de difusión: uno interno con las instituciones académicas involucradas, y otro externo orientado a instituciones y organizaciones que forman parte de la comunidad científica en el área de modelamiento, a investigadores en el área de la enseñanza matemática, y a estudiantes y docentes de instituciones de educación superior.

### **Socialización de la comunidad**

El uso de las TIC permite a diferentes grupos de personas el acceso a contenidos y materiales educativos que de otra forma sería imposible obtener.

Gracias a las facilidades tecnológicas, en el presente proyecto se puede evaluar la interacción de varios grupos de estudiantes con diferentes herramientas educativas en una serie de casos desarrollados de manera interdisciplinaria; el propósito es interactuar con un mayor grupo de docentes, investigadores y estudiantes.

Como se mencionó, la socialización del proyecto se ejecutó en dos etapas: una interna y otra externa.

### ***Socialización interna***

Esta etapa se concentró en instituciones educativas involucradas en el proyecto y tuvo como objetivo la formación de una comunidad educativa en torno al proyecto con la mediación de la plataforma web. Para esto, los actores debían ingresar al sitio web para compartir las experiencias y los conocimientos adquiridos. De este modo, se creó una red interdisciplinaria de investigadores, cuyos nodos iniciales están representados por los cuatro grupos de investigación que desarrollaron el proyecto (Gidsaw-UDI, Tecnice-UCentral, Tecnimat-UCentral y Kishurim-UHJ).

### ***Socialización externa***

Se llevó a cabo de la siguiente manera:

1. *Socialización con entidades afines y conocidas.* El grupo de investigadores y docentes del proyecto divulgó el trabajo entre colegas de otras instituciones con los que tuvieran comunicación continua con el fin de generar nuevos enlaces con diferentes instituciones.
2. *Socialización a la comunidad en general.* Mediante la plataforma Renata, se divulgó tanto el proyecto como la comunidad educativa creada en la plataforma web.

Los enlaces creados con otras instituciones generan nuevos enlaces y, de esta forma, se va escalando la comunidad. Con mayor número de personas y con apoyo de las herramientas planteadas en el proyecto, se obtienen mejores procesos de discusión y debate.

También se hizo divulgación científica del proyecto mediante la presentación de ponencias y artículos; además de esto, se planearon publicaciones adicionales y seminarios continuos en las instituciones involucradas con el fin de que nuevas instituciones conozcan el proyecto. Asimismo, se usaron redes sociales como Twitter y Facebook, donde también se agrupan pequeñas comunidades de docentes e investigadores alrededor de sus áreas de afinidad y actuación.

## Pilotaje de la comunidad 2.0 en el proyecto “Red de Modelamiento y Representación Formal en Matemáticas”

### Condiciones previas

A partir del proyecto de argumentación que antecedió al proyecto actual, se definieron las características que se debían implementar en la página web, entre las que cabe resaltar una opción para contener proyectos como este y los que se llegasen a crear.

Una condición importante era destacar el material de apoyo desarrollado para cada una de las asignaturas estudiadas por la comunidad de estudiantes; para ello, en la opción “Proyecto” (Renata II) se incorporaron los siguientes ítems:

- Clasificación, a cargo de las universidades, del material de cada espacio académico designado en el proyecto.
- Elementos de las asignaturas:
  - Matriz de competencias
  - Casos. Cada uno se encuentra propuesto de acuerdo con el planteamiento del problema que deberá trabajarse en cada una de las diversas formas de representación (verbal, algebraica, diagramática y computacional).
  - Software y manuales de las herramientas de apoyo para cada una de las representaciones de los casos propuestos.

En la opción de “Comunidad”, se publicó el material para cada sesión de trabajo, de modo que los estudiantes lo descargaran como requisito para el desarrollo de cada caso de estudio. Los resultados obtenidos en cada sesión se recolectaron, organizaron y comprimieron para subirlos a la sesión respectiva, con el fin de que los estudiantes pudieran revisarlos y plantear sus opiniones.

### Procedimientos

#### *Uso de la web 2.0 que hace la comunidad en general*

En la navegación básica, el usuario general de la comunidad web 2.0 se encuentra con las siguientes secciones o elementos:

- Interfaz principal de la web para acceder a los contenidos estáticos de los proyectos ejecutados por el grupo de investigadores y al mapa del sitio.



- Sección Proyectos donde se publican los desarrollos de los proyectos de investigación para que los usuarios revisen tanto la información sobre las competencias que deben desarrollarse en las asignaturas como los casos trabajados; estas opciones están disponibles para la Universidad Central y para Universitaria de Investigación y Desarrollo (UDI).
- Sección “Noticias” en la que se publican las últimas novedades de la Red Nacional Académica de Tecnología Avanzada (Renata).
- Sección “Comunidad” para los usuarios registrados. Aquí se presentan contenidos específicos de la etapa de experimentación del proyecto y se facilita la participación de la red social y de los foros programados.

### ***Uso de la web como apoyo al proceso experimental***

#### ***Sesión de clase***

Se desarrollaron sesiones de trabajo con los estudiantes utilizando cada forma de representación (verbal, algebraica, diagramática y computacional) con su respectivo software (Argonaut, Derive, DIA y MatLab).

Los materiales para las sesiones de trabajo y los casos propuestos se planeaban previamente y podían ser descargados ingresando con contraseña a la sección “Comunidad”. De igual manera, se podía acceder a la sección “Foro” en la que se proponía el caso de estudio del día; en esta misma sección, estaban disponibles los casos estudiados que servían de guía al desarrollo del nuevo caso.

#### ***Participación en foros***

Con el propósito de que los usuarios de la comunidad web 2.0 consultaran los desarrollos (soluciones) de los casos previos, descargaran los archivos guardados durante las sesiones y accedieran a los documentos de los casos planteados, en la sección “Foro” se organizaron por fecha las sesiones de trabajo de ambientes tecnológicos. De igual forma, los participantes de la comunidad tenían la opción de crear nuevos foros.

Terminando el proceso de experimentación, se habilitaron foros de participación sobre temáticas diferentes a los casos de las sesiones previas; algunos de ellos fueron: *Bungee jumping* para Matemáticas III y *Transmilenio* para Modelamiento y Simulación. En estos foros, los estudiantes participaron, dejaron comentarios para alimentar el desarrollo del ejercicio, subieron archivos de imágenes y textos, y archivos de los ambientes tecnológicos; esto facilitó la presentación de aportes y

comentarios al ejercicio propuesto. Al terminar el tiempo asignado para los foros, se finalizó la participación y se procedió a cerrarlos.

## Propuesta metodológica para el diseño y uso de un ambiente web 2.0

Al evaluar el uso de las páginas web como apoyo a la formación, se observa que las comunidades son muy activas, participativas y receptivas, de tal forma que los estudiantes en su interacción con la tecnología producen información, aprenden de forma más rápida y crean una dinámica individual que les permite organizar y transformar su conocimiento, especialmente cuando hay claridad en el objetivo que se debe cumplir.

Para diseñar y desarrollar un proyecto de este tipo, se deben identificar y valorar: el grado de pertinencia y relevancia del tema, el diagnóstico de la comunidad participante, las TIC pertinentes para el cumplimiento de los objetivos y la información continua a la comunidad.

La prueba piloto del proyecto de “Red de Modelamiento y Representación Formal en Matemáticas” permitió establecer la relación de la comunidad web 2.0 con el proceso de participación de los estudiantes en las sesiones de trabajo de las asignaturas seleccionadas. Los resultados obtenidos indican que este proceso se caracteriza por ser altamente participativo, que el papel principal lo tienen todos los participantes y que es la misma comunidad la que determina los resultados del análisis del trabajo desarrollado.

La metodología pretende establecer la dinámica de la comunidad en relación con el uso, conocimiento, percepción e interés por los temas de apoyo académico generados. La finalidad es que tanto el apoyo de los guías expertos como las tecnologías sean asumidos como herramientas para apoyar el proceso de transformación y aprendizaje.

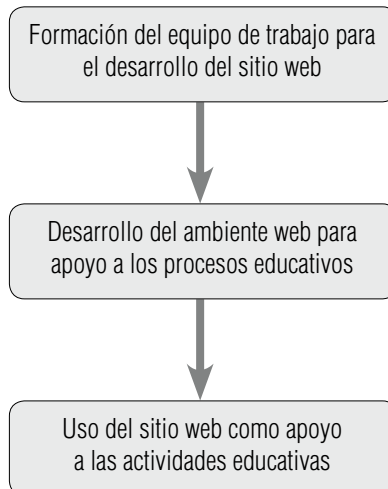
### **Fases propuestas para la metodología**

- La metodología permite establecer las fases y sus actividades, con énfasis en:
- Los roles y responsabilidades de los actores que interactúan en cada fase.
- La aplicación de la metodología para el desarrollo de sitios web.
- El procedimiento y las medidas de uso del sitio web.

Se consideran tres fases: formación del equipo, desarrollo del ambiente web y uso del sitio web (véase figura 1).

1. Formación del equipo y plan de trabajo para el desarrollo de un sitio web

- Se elabora un plan de gestión donde se identifica el personal que va a interactuar y el ambiente web educativo (recursos, cronograma, etc).
- Se estructura el plan de trabajo del proyecto y los procesos de dirección y coordinación de las tareas asignadas.
- Se definen los espacios de comunicación para integrar los recursos creados y facilitar y optimizar las tareas que se desarrollarán.



**Figura. 1.** Fases de la propuesta metodológica para el diseño y uso de un ambiente web.

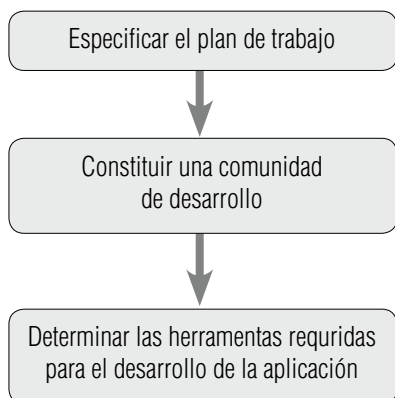
2. Desarrollo del ambiente web. En esta fase se propone un plan de trabajo compuesto por ciclos que integran las actividades que serán ejecutadas por la comunidad de desarrolladores; estos ciclos deben ser secuenciales y cada vez que se apruebe uno, se pone a disposición para el proceso de prueba y se registra el seguimiento al *software* por medio de un control de versiones.

3. Uso del sitio web como apoyo a las actividades educativas. Esta fase deberá tener en cuenta lo siguiente:

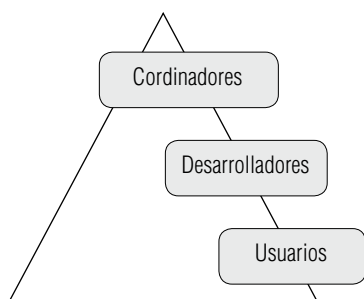
- Socializar el procedimiento para el uso del sitio web.
- Ofrecer capacitación sobre el uso adecuado del sitio web a los estudiantes, docentes y usuarios de la comunidad.
- Presentar las unidades temáticas con sus respectivas guías, ejercicios y casos de estudio, y espacios para formulación de preguntas y aclaración de dudas.
- Disponer de herramientas propias que puedan usarse en cada actividad.
- Almacenar materiales probados.
- Construir indicadores de medición para evaluar el uso del sitio web con el propósito de obtener información de retorno.

## Descripción detallada de la metodología

### **Fase 1. Formación del equipo y plan de trabajo para el desarrollo de un sitio web.**



**Figura 2.** Actividades para la formación del equipo de trabajo para el desarrollo de un sitio web.



**Figura 3.** Comunidad de desarrolladores y su grado de responsabilidad

- **Coordinadores.** Son los encargados de realizar las reuniones y de especificar el plan de trabajo del proyecto y de presentarlo a los integrantes del proyecto. En este grupo se definen los estándares de desarrollo que se utilizan y se garantiza que las pruebas se han realizado para proceder a liberar cada versión del sitio web.

Es importante que en este grupo haya un coordinador principal o administrador que planee y coordine las actividades relacionadas con cada fase y con el uso de las herramientas de trabajo colaborativo, con el control de las versiones y el seguimientos a las fallas presentadas; además, debe tomar decisiones sobre los posibles cambios y modificaciones.

#### **Actividad 1. Especificar el plan de trabajo del proyecto**

Se planean, programan y supervisan las tareas que permiten desarrollar el proyecto. Es de suma importancia tener claridad sobre el alcance del proyecto para calcular el costo real de cada actividad.

Este plan de trabajo constituye la carta de navegación del proyecto y facilita la toma de decisiones adecuadas.

#### **Actividad 2. Constituir una comunidad de desarrollo**

En los grupos o comunidades de desarrollo es clave definir los perfiles, los roles y las responsabilidades de cada uno de los actores que intervienen en el desarrollo del proyecto (véase figura 3).

La experiencia que tenga cada uno de ellos es importante para definir las actividades específicas que se le asignarán. En el grupo se determinarán los siguientes roles:

- **Desarrolladores.** Son los responsables de construir, probar, instalar, configurar y realizar el mantenimiento del ambiente virtual de desarrollo. Deben hacer uso de las diversas herramientas definidas para el diseño, soporte y adecuada funcionalidad de los materiales y del sitio desarrollado.
- **Usuarios.** Personas con interés de participación en el proyecto, que pueden acceder al sitio del proyecto y plantear aportes desde sus experiencias.

### *Actividad 3. Determinar las herramientas requeridas para el desarrollo de la aplicación*

Es importante determinar las herramientas necesarias para implementar cada una de las temáticas propuestas y desarrolladas en la aplicación. Las herramientas primordiales pueden clasificarse en las siguientes categorías:

- **Herramientas para la gestión.** Son aquellas que facilitan el seguimiento del proyecto y de las actividades propias del grupo de desarrolladores. Su función es llevar un control de las revisiones, el historial de modificaciones, el registro y el seguimiento a fallas presentadas.
- **Herramientas de comunicación.** Son llamadas herramientas asincrónicas, pues no es necesario que se usen de forma simultánea; entre estas se incluyen: correo electrónico, blogs, wikis, foros, listas de distribución, herramientas para compartir material multimedia, clasificación y recolección de información, organizadores gráficos, mapas+datos (*mash\_up*).
- **Herramientas de conferencia.** También llamadas herramientas sincrónicas. Las personas que participan están conectadas al mismo tiempo, de modo que sus intervenciones son observadas por el resto de participantes; algunas de ellas son: chat, mensajería instantánea, *microblogs*, *suite* de oficina en línea y videoconferencia.

### *Fase 2. Desarrollo del ambiente web para apoyo a los procesos educativos*

Entre las actividades primordiales de esta fase está la definición de la metodología de desarrollo y del ciclo de vida del *software* apropiado para los objetivos del proyecto. Esta actividad debe ejecutarse teniendo en cuenta que la finalidad del sitio web es apoyar procesos educativos y, por ende, es necesario incorporar elementos pertinentes al proceso de enseñanza y aprendizaje.

Para desarrollar un proyecto de *software* es necesario establecer un enfoque disciplinado y sistemático. De acuerdo con Piattini (1996), las metodologías de desarrollo, que se elaboran a partir de un marco definido por uno o más ciclos de vida, influyen directamente en el proceso de construcción.

Las metodologías satisfacen tres necesidades principales (Cataldi, 2000):

- Mejorar la calidad de las aplicaciones.
- Asegurar un proceso de desarrollo controlado: uso de recursos apropiados y costo adecuado.
- Mantener un proceso estándar en la organización, que no se afecte por los cambios del personal.

Aunque las metodologías tienen diferentes objetivos, estos se pueden agrupar en los siguientes:

- Brindar un método sistemático para controlar el avance en la ejecución del proyecto.
- Especificar los requerimientos del software.
- Construir productos bien documentados y de fácil mantenimiento.
- Identificar oportunamente las necesidades de cambio.
- Proporcionar un sistema ágil que satisfaga a todas las personas involucradas en el proyecto.

La selección de un modelo de ciclo de vida del *software* está asociada al orden de las actividades propuestas y a las características del producto que se desea tener. De acuerdo con Sommerville (2002), un ciclo de vida de *software* normalmente tiene las siguientes actividades:

- Análisis y definición de requerimientos. Se definen los servicios, restricciones y metas del sistema a partir de consultas con los usuarios. Esto puede constituir una especificación del sistema.
- Diseño de sistemas y de *software*. Se establece una arquitectura completa del sistema y se diseña el *software* que identifique y describa las abstracciones fundamentales del sistema y sus relaciones.
- Implementación y prueba de unidades. El diseño de *software* se lleva a cabo como un conjunto o unidades de programas que deben ser probados para que cumplan las especificaciones requeridas.
- Integración y prueba del sistema. Los programas o las unidades individuales de programas se integran y prueban como un sistema completo para asegurar que se cumplan los requerimientos del *software*.
- Operación y mantenimiento. Además de instalar y ejecutar el sistema, se debe programar el mantenimiento, que implica corregir errores no descubiertos en las etapas anteriores del ciclo de vida, mejorar la implemen-

tación de las unidades del sistema y optimizar los servicios del sistema a partir de nuevos requerimientos.

Es recomendable realizar un plan de iteración compuesto por ciclos, donde cada conjunto de tareas sea atendido por la comunidad de desarrolladores, de forma que sean ciclos secuenciales y que, una vez aprobados, se pongan a prueba; si el resultado es satisfactorio, se puede liberar la versión, no sin antes registrar este procedimiento en el control de versiones (figura 4).

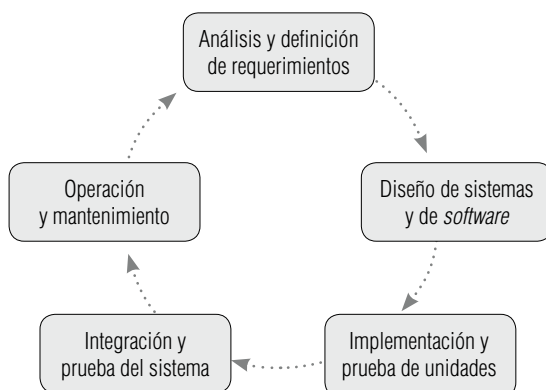


Figura 4. Ciclo de vida para desarrollo de software

### ***Fase 3. Uso del sitio web como apoyo a las actividades educativas***

Desarrollar un sitio web para apoyo al proceso educativo implica determinar muy bien tanto las herramientas informáticas como la plataforma que se usarán, de tal forma que pueda garantizarse su usabilidad.

Entre los aspectos que permiten a los usuarios un buen desarrollo de sus actividades se encuentran:

#### ***La interacción***

Si las actividades son colaborativas, el tipo de interacción hace referencia tanto a la forma de agrupar a los estudiantes participantes, como a los roles que cada uno debe asumir en el grupo (López, 2010).

En relación con la forma de trabajar colaborativamente a través de internet con los estudiantes, se identifican cuatro configuraciones básicas: individual (estudiante a estudiante), grupal (grupo a grupo), por clase (aula de clase a aula de clase) o por rol (clase a experto). En el primer caso, cada estudiante se comunica con un par de otra institución educativa; en el segundo caso, se forman grupos pequeños de 5 o 6 estudiantes y cada grupo se comunica con otro grupo afín de otra institución; en el tercer caso, el aula de clase completa de una institución se comunica con otra aula de clase completa de otra institución; en el último caso, los estudiantes de toda una clase de una o más instituciones se

comunican con un experto en el tema objeto de estudio para hacerle consultas específicas.

También pueden configurarse nuevas formas de organización de acuerdo con las especificaciones de la temática o de los grupos colaborativos. Lo importante es asegurar que cada grupo de trabajo colaborativo de estudiantes elabore el trabajo final solicitado.

En cuanto a los roles de los participantes, Bravo (2007) propone la siguiente clasificación:

- *Coordinador.* Diseña el proyecto (temática, contenidos, cronograma, actividades, etc.) y vincula a otros docentes y estudiantes; identifica factores de riesgo o seguridad; promueve la participación; comprueba el cumplimiento del cronograma; vela para que se alcancen los objetivos de aprendizaje propuestos y para que en los productos finales solicitados se evidencie la colaboración. Generalmente, este rol lo desempeñan los docentes de área.
- *Administrador del entorno.* Diseña, crea selecciona o habilita el entorno web o plataforma, mediante el cual van a interactuar los estudiantes durante el proyecto; además, soluciona problemas de índole técnica y vela por el uso apropiado de las herramientas informáticas. Este rol es asumido, por lo general, por el docente de informática.
- *Facilitador.* Estudiante que lidera cada grupo. Presenta los integrantes de su equipo a los demás equipos de otras instituciones educativas; modera la comunicación entre participantes durante el desarrollo del proyecto y media en caso de presentarse algún conflicto; informa periódicamente al coordinador los avances del trabajo y le reporta cualquier anomalía, factor de riesgo o problema de seguridad que se presente. Además, organiza los participantes en comisiones y les asigna roles (relator y participantes).
- *Relator.* Estudiante que consigna las ideas principales de las discusiones y redacta resúmenes periódicos que, luego de que lo revisen todos los integrantes del equipo, se publican en el medio acordado para documentar el proyecto. Este rol se puede rotar entre los estudiantes participantes.
- *Participante.* Rol que corresponde al resto de estudiantes participantes en el equipo de trabajo que colaboran con las actividades propuestas, opinan sobre las participaciones de los demás y sobre el contenido de los materiales y de la documentación propuesta por los docentes.

Para el tipo de trabajo “estudiante a estudiante” no aplican los roles mencionados.



### ***Relación con el plan de estudios***

Los proyectos con fines de aprendizaje que implican trabajo colaborativo impactan positivamente el rendimiento de los estudiantes en las asignaturas, pues facilitan la práctica y la profundización de los contenidos; además, permiten el trabajo interdisciplinario en escenarios de uso de diversas herramientas informáticas. Esto requiere que el docente identifique y plantee de forma clara los objetivos de aprendizaje del proyecto y de cada unidad temática.

Tanto los objetivos como el plan de estrategias son dos elementos que deben tener muy claro los estudiantes y docentes para obviar actividades que no conduzcan a obtener los resultados esperados.

### ***Estrategias que conduzcan al aprendizaje y al trabajo colaborativo***

El “producto final” solicitado desde el inicio del proyecto colaborativo debe orientar las actividades de los equipos de trabajo y evidenciar tanto los aprendizajes alcanzados en la asignatura como el trabajo colaborativo y la participación de los estudiantes en el desarrollo del proyecto (López, 2002). La gama de productos que se puede solicitar es muy amplia, y la colaboración entre los estudiantes al elaborarlos está fuertemente ligada a la estrategia que se utilice.

A continuación se presentan algunos ejemplos de estrategias tomados de Harris (1995):

- *Consultas.* Contacto, vía correo electrónico, con expertos para que los estudiantes aclaren aspectos confusos del tema de estudio. Este tipo de estrategia evidencia la colaboración entre estudiantes tanto para ponerse de acuerdo en la formulación de las preguntas a los expertos como en el informe final que deberán presentar.
- *Intercambio de información.* Los estudiantes buscan, seleccionan y organizan información sobre el tema de estudio propuesto y la intercambian con sus compañeros de la otra institución educativa. Esta información, preferiblemente debe ser de carácter local, no disponible en internet o incluir algún grado de análisis que facilite su comprensión.
- *Bases de datos.* La información recolectada con fines de intercambio se estructura y sistematiza en una base de datos para facilitar las consultas. Adicionalmente, los diferentes grupos de estudiantes alimentan las bases de datos continuamente y de manera independiente.
- *Publicaciones digitales.* Estudiantes de diferentes instituciones educativas editan y diseñan conjuntamente publicaciones digitales, tales como boletines, revistas, periódicos, páginas web, wikis o blogs. Esta estrate-

gia implica compromiso y colaboración de los estudiantes en roles como generadores de información que enriquezca la publicación o como co-responsales.

- *Trabajos de campo.* Los estudiantes de cada institución realizan expediciones para recolectar información o hacer observaciones respecto al tema propuesto en el proyecto y comunican a su contraparte los hallazgos. Una vez recopilados los datos suministrados por todas las instituciones participantes, es importante elaborar un informe conjunto que incluya tanto el análisis como las conclusiones sobre de los datos. Por ejemplo, recolección, análisis y conclusiones de información medioambiental (contaminación atmosférica, temperatura del agua, etc.).
- *Solución paralela de problemas.* A todos los grupos participantes se les presenta el mismo problema y se les da un tiempo prudencial para resolverlo. Posteriormente, cada grupo presenta y sustenta su solución para recibir comentarios de otros grupos que amplíen la visión sobre el problema y las diferentes formas de enfrentarlo. En esta estrategia, son fundamentales las discusiones que se den en torno a las soluciones alcanzadas.
- *Creaciones secuenciales:* Los estudiantes de cada institución realizan una creación artística o literaria que luego intercambian con un compañero virtual, quien a su vez plantea su aporte personal (variaciones o complementos). Estas creaciones deben ser digitales y cada estudiante debe guardar una copia del archivo original recibido de su compañero virtual antes de agregar su aporte. Al final, se presenta un informe conjunto que refleje la manera en que los aportes mejoraron o empeoraron la creación original.

### **Herramientas informáticas de apoyo y el sitio web**

De acuerdo con las actividades y temas propuestos, los estudiantes podrían necesitar algunas herramientas informáticas de apoyo, entre ellas: procesador de texto, hoja de cálculo, *software* para diseño de presentaciones, bases de datos, editores para audio y video y herramientas de aprendizaje visual. Es importante que los productos solicitados a los estudiantes puedan ser desarrollados con las herramientas propuestas desde la planeación o que sea *software* libre.

Como apoyo adicional, se puede usar el sitio web en donde los estudiantes y docentes tengan a disposición tanto los materiales necesarios para documentarse sobre las temáticas y actividades como las herramientas que les faciliten la comunicación, almacenamiento y evaluación de los procesos de aprendizaje.

### ***Ejecución de actividades con apoyo del sitio web***

Para las buenas prácticas de uso del sitio web, se deben tener en cuenta, entre otros, los siguientes aspectos:

- El tipo de usuarios que accederán al sitio web.
- El proceso de inscripción de usuarios.
- La interacción que permitirá el uso del sitio web y la precisión sobre la posibilidad de incorporar más proyectos de trabajo colaborativo.
- La relación del plan de estudios con el sitio web.
- La lista de herramientas informáticas disponibles en el sitio.
- La facilidad de uso del sitio y la ayuda y soporte técnico disponible; se debe indicar también los criterios para la publicación de productos de los estudiantes.
- La socialización del proyecto para formar una comunidad académica en torno al tema.

En cuanto al apoyo del sitio web a los procesos de enseñanza-aprendizaje de las asignaturas del proyecto, se deben considerar los siguientes:

- Planear y hacer seguimiento al proyecto. El proyecto debe estar totalmente instalado, probado y con todos los materiales almacenados, de modo que se facilite la ejecución de las actividades de cada asignatura.
- Diseñar e implementar un plan de capacitación a los usuarios, teniendo en cuenta los perfiles de usuarios que definen las actividades que deberán ejecutar.
- Desarrollar, de forma integral y con el apoyo del sitio web, el plan de trabajo planeado para cada asignatura.
- Hacer un continuo seguimiento de las actividades desarrolladas con apoyo del sitio, verificando su debida funcionalidad, el tipo de uso que hacen los usuarios, el almacenamiento de los productos requeridos y el soporte ofrecido.

## **Conclusión**

En torno al desarrollo del proyecto “Red de Modelamiento y Representación Formal en Matemáticas” se integró una comunidad académica con implementación de un sitio web 2.0 usando la red Renata; esto permitió la formación de una red de estudiantes, investigadores e instituciones educativas con interés en el tema de modelamiento en las matemáticas.

El diseño final del proyecto ha permitido, entre otras, las siguientes opciones:

- Proyectos. Se puede incluir y administrar más de un proyecto.
- Administración de la información y de productos de cada proyecto, como: la matriz de competencias, los casos de cada asignatura y de las universidades participantes en el proyecto, y los productos generados (artículos, ponencias, libros).
- Noticias. Publicación de información sobre eventos relacionados con el aprendizaje del modelamiento y notas de interés común.
- Administración y participación en foros, chat, fotos, video y otras herramientas. Adicionalmente toda la comunidad inscrita puede contar con los materiales de apoyo del proyecto generados por los estudiantes en cada sesión y con los comentarios que suscita cada propuesta de solución.
- Debido a que el proceso del desarrollo del proyecto del sitio web no había llegado a su etapa de madurez para garantizar el debido apoyo durante todo el proceso experimental, se llevó a cabo una prueba piloto con la que se pudo concluir que es fundamental definir una metodología que permita a proyectos futuros contar con el apoyo del sitio web en el momento de desarrollo de cada actividad de las asignaturas.
- Interacción de la comunidad participante de forma permanente mediante la incorporación de herramientas tecnológicas como *Skype*, *drop-box*, correo electrónico y *google docs*.

## Referencias

- Bottino, R. M. y Kynigos, C. (2009). Mathematics Education & Digital Technologies: Facing the Challenge of Networking European Research Teams. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 14(3): 203-215.
- Bravo, O. (2007). Trabajo en colaboración mediado por las TIC. Caracas: Federación Internacional de Fe y Alegría. Consultado el 28 de noviembre de 2008 en [www.feyalegría.org/images/acrobat/libro\\_trabajo\\_colaboracion\\_14803.pdf](http://www.feyalegría.org/images/acrobat/libro_trabajo_colaboracion_14803.pdf)
- Cataldi, Z. (2000). *Metodología de diseño, desarrollo y evaluación de software educativo* (tesis de magíster en informática). UNLP.
- Freiman, V. y Lirette-Pitre, N. (2009). Building a Virtual Learning Community of Problem Solvers: Example of Casmi Community. *ZDM*, 14(1).

- González, A., Calderón, S., Hidalgo, R. y Romero, C. (2006). Matemáticas y nuevas tecnologías en la enseñanza universitaria. Universidad de Málaga.
- Harris, J. (1995). Organizing and Facilitating Telecollaborative Projects. Consultado el 12 de mayo de 2009 en <http://virtual-architecture.wm.edu/>
- Lardner, E. y Malnarich, G. (2008). New Era in Learning-Community Work: Why The Pedagogy of Intentional Integration Matters. *Change Magazine*.
- López, J. (2010). Elementos fundamentales para la planeación de proyectos colaborativos en internet. Eduteka.
- Majid, K. G., O, A. G., Atan, N., Idrus, H., Rahman, Z. A. y Tan, K. E. (2007). The Videoconferencing Learning Environment: Technology, Interaction and Learning Intersect. *British Educational Communications and Technology Agency*.
- Martínez, C. y Calao, G. (2012). Aplicación del sitio web “VirtualMates” en la enseñanza de las matemáticas.
- Robutti, O. (2010). Graphic Calculators and Connectivity Software to Be a Community of Mathematics Practitioners. *ZDM*, 42(1): 77–89.



## Conclusiones



Este libro es resultado de un proyecto que tiene como objetivo general evaluar el efecto del ejercicio de la representación en los sistemas formales (verbal, diagramático, algebraico y computacional) en el desarrollo de la competencia de modelamiento matemático, con apoyo de ambientes digitales.

La formación de profesionales con competencia para interpretar y modelar la dinámica de las variables de su entorno y mirar en prospectiva cómo puede integrar el conocimiento a favor de la vida y, en particular, de la convivencia humana es un reto permanente para los formadores en las facultades de ingeniería. La complejidad es la dimensión propia del mundo de la vida, y el modelamiento es una estrategia para lidiar con la complejidad.

Los procesos de modelado vienen evolucionando con la historia del conocimiento humano en la medida en que se sintetiza en soluciones a problemas formulados explícitamente y resueltos efectivamente. En esa evolución, la matemática se convierte en conocimiento estructurante de la observación activa para generar representaciones formalizadas que se vinculan en la era de la información a los procesos de simulación. Los modelos matemáticos, los artefactos y las simulaciones forman un continuo cuya función es vincular conocimiento con la satisfacción de necesidades.

Se concibe la competencia de modelamiento como un proceso cognitivo dinámico que relaciona los referentes ubicados en el entorno de una persona que los representa y que crea, como resultado de su observación, un modelo mental del referente y lo traduce en un modelo conceptual usando símbolos físicos en forma de lenguaje verbal, diagramático, algebraico o computacional. Los modelos conceptuales convierten a los modelos mentales en objetos que constituyen la base de la comunicación con otros actores que conocen de la misma manera. En la dinámica comunicacional, el modelo conceptual genera

nuevos cambios en los modelos mentales de los actores. En consecuencia, el modelamiento tiene tanto dimensiones individuales como sociales, y evoluciona como resultado de las interacciones con el referente y de la socialización de modelos conceptuales con otros actores.

El proyecto gira alrededor de un modelo pedagógico que integra cuatro formas de representación en la construcción de la competencia de modelar: verbal, diagramática, algebraica y computacional. Los ambientes de trabajo se ubican en la perspectiva digital, y cada forma de representación tiene apoyo en dispositivos digitales. Los sistemas directamente guardan tanto información del proceso como los productos, con el propósito de disponer de ellos para análisis posteriores. De esta manera, el proceso de formación adquiere un estilo de experimentación y revisión de los resultados. Es una forma de integrar estructuralmente los ambientes digitales en el proceso de representación de conocimiento y de generación de visión prospectiva y de soluciones a problemas de la ingeniería.

El modelo pedagógico se orienta por los resultados más relevantes de la literatura científica sobre el tema y configura cuatro escenarios de procesos diferenciados.

En el primer escenario se formula un problema en un contexto que debe ser desarrollado mediante una solución argumentativa en proceso colaborativo. La capacidad de dar explicaciones y elaborar propuestas en la actividad y la cantidad de participación en la interacción son factores que pedagógicamente ofrecen especial potencial para activar el aprendizaje en los procesos argumentativos. La argumentación tiene un valor fundamental para manejar la relación con el contexto y activar los aprendizajes previos. Como antesala a las otras representaciones, parece tener especial valor activador tanto de la cognición como de la motivación.

El segundo escenario tiene como insumo los resultados del proceso anterior y valida la solución desde la perspectiva algebraica. En la representación algebraica, la comprensión del problema constituye el punto de partida para una representación. Los estudiantes exitosos identifican las preguntas claves en la solución del problema y las variables con los datos, y a partir de ellas seleccionan las fórmulas. Esta solución formal es el insumo para el proceso de representación diagramática del siguiente escenario.

En el tercer escenario (representación diagramática) se genera una estructura visual integrada del proceso lógico en forma de algoritmo. Aparece como un proceso de nivel metacognitivo que se nutre, en un enfoque inductivo, de



la representación verbal y algebraica. El uso de categorías que identifican y caracterizan los procesos y su organización contribuyen positivamente al aprendizaje. La conciencia de la organización del sistema de variables como punto de partida para darle significado a los problemas, de la secuencia de decisiones vinculadas a preguntas y de los procesos con entradas, salidas y vínculos influye en la formación de un modelo mental que habilita la comparación entre soluciones a diferentes problemas y la posibilidad de transferencia de conocimiento.

El cuarto escenario (representación computacional como simulación y su integración al proceso de formación de la competencia de modelamiento) aparece como la dimensión menos desarrollada en este proyecto. Si bien es cierto que el aprendizaje de la programación es una de las habilidades más difíciles de adquirir (similar a la de escribir), la investigación previa, incluso con estudiantes de educación básica (como se puede ilustrar con las investigaciones con el lenguaje Logo), justifica la hipótesis de que si se introduce la formación básica en el primer semestre y se utiliza de manera regular en los cursos de matemática, la formación de los estudiantes de ingeniería se vería beneficiada en gran medida. Al parecer, para que se genere un efecto cognitivo de la representación computacional en la competencia de modelamiento, el estudiante tiene que lograr un nivel de funcionamiento del programa que le permita visualizar los resultados directos de la solución del problema específico y, a partir de esta solución, ejecutar variantes del programa; estas constituyen escenarios posibles que activan la visión prospectiva. En el contexto de los proyectos de ingeniería, contribuyen a desarrollar la capacidad de analizar opciones de solución de los problemas.

El carácter sistémico de este modelo pedagógico, basado en los trabajos descriptivos y analíticos del proceso de modelado desde la perspectiva matemática, en los estudios de la neurociencia sobre procesamiento e integración de entradas múltiples al cerebro y en el desarrollo de estrategias de aprendizaje, muestra su especial valor cuando se hace el análisis estadístico de los resultados. En efecto, los estudiantes que participaron en la experiencia tuvieron un rendimiento significativamente superior en todas las evaluaciones de los cinco cursos y en las dos universidades donde se desarrolló el proyecto, en comparación con los cursos que se desarrollaron con el enfoque pedagógico normal de cada institución. Más aún, la diferencia en aprobación de la asignatura es de 24 puntos porcentuales, lo cual ubica a estos cursos en niveles de aprobación del 67%.

Estos resultados concuerdan con los niveles de satisfacción de los estudiantes que manifestaron estar satisfechos y haber tenido experiencias de aprendizaje muy valiosas para su preparación profesional. En igual sentido, los

resultados son consistentes con el estado de la investigación sobre el tema. El aporte más destacable es el carácter sistémico de la propuesta que la muestra factible y pertinente en el ambiente universitario actual. Todo indica que, en la lógica del proyecto, sería posible elevar el rendimiento al 80%, si se hacen los ajustes que se identificaron al hacer el análisis de datos.

Los escenarios digitales cumplieron una función facilitadora del aprendizaje del modelamiento. La argumentación en formato verbal fue desarrollada en el escenario Argunaut, sistema basado en ontologías argumentativas, que genera mapas argumentativos, dibuja la red social resultado del proceso, permite la moderación por parte del profesor, el análisis del contenido de las participaciones y las características del desempeño de cada participante. El razonamiento diagramático fue desarrollado usando el ambiente DIA; el razonamiento algebraico, en el ambiente Derive.

La integración estructural de estos ambientes a un proceso curricular regular muestra posibilidades muy promisorias para que la formación del ingeniero se centre en el aprendizaje. El ambiente web ofrece la posibilidad de apoyar la gestión curricular en línea y garantiza la disposición de los recursos tanto para que sean usados por los usuarios como para archivar la información generada en el proceso curricular; incluso los procesos de asistencia a las sesiones de trabajo y la forma y características de la participación pueden quedar registrados y disponibles para que sean revisados por los actores del proceso curricular.

El modelo se organizó en forma de sistema: la solución argumentativa era insumo para la solución algebraica, esta era insumo para proceso de diagramación; con la solución diagramática se pasaba finalmente a la solución computacional. Otras secuencias son posibles con diferentes justificaciones. Por ejemplo, sería justificable tener una sesión argumentativa como introducción a la representación algebraica y a la computacional. El poder activador de conocimientos previos de la argumentación y su capacidad para construir hilos argumentativos pueden ser marco conceptual para hipotetizar resultados igualmente promisorios o incluso superiores a los observados en este proyecto. Podría también pensarse en escenarios donde la argumentación siga a las representaciones algebraica, diagramática o computacional, como estrategia de revisión y formación de procesos metacognitivos.

Lo interesante del modelo es que se centra en el aprendizaje de los estudiantes y no en la enseñanza, como es lo común en los enfoques de la pedagogía tradicional. Si un sistema como este permitiera a los estudiantes disponer de tiempo suficiente, se podría lograr aprendizaje de dominio y apuntarle a la formación de alta calidad en los estudios de matemáticas para ingenieros.

En cuanto a la **representación verbal**, la activación de aprendizajes previos, la capacidad para relacionar el problema con variables del contexto y el potencial para la activación social del aprendizaje fundamentan la conveniencia estratégica, en el modelo pedagógico, de incluir el proceso argumentativo como paso anterior al proceso algebraico. En cuanto al proceso mismo de solución, se observa cómo el número de pasos correctos se correlaciona positivamente con las soluciones encontradas. También se muestra la importancia de encontrar el modelo matemático adecuado para tener éxito al encontrarse una correlación positiva entre fórmulas usadas y las notas obtenidas, los pasos correctos y las soluciones encontradas.

**Representación diagramática.** Es la forma de representación que mejor se relaciona con los resultados en las evaluaciones de los cursos. En la forma como se organizó el modelo pedagógico, los estudiantes tienen como experiencias previas la representación verbal y algebraica, y con ellas se avanza a esta forma de análisis que tiene como insumo los resultados de las representaciones anteriores y constituye un análisis de nivel superior. El uso de categorías y explicaciones verbales en el proceso de diagramación correlaciona positivamente con los resultados en las evaluaciones. El nivel de representaciones correctas en los diagramas de influencias es un predictor significativo de los resultados en las evaluaciones. Los estudiantes mejoran con la experiencia el nivel de elaboración de los diagramas; esto sugiere que la sistematización es un factor que contribuye positivamente en la integración de esta forma de representación como estrategia efectiva del aprendizaje autónomo del estudiante.

**Representación computacional.** La representación computacional marca el final del ciclo pedagógico en el modelo evaluado. En su conjunto, es el de menor impacto en los resultados; sin embargo, el número de sesiones y la efectividad de las soluciones tienen una correlación positiva con los resultados en las evaluaciones. Las razones más relevantes para estos resultados se encuentran en la baja experiencia de los estudiantes en el uso del lenguaje de programación. Para la implementación posterior del modelo, de manera similar a la diagramación, se requiere hallar un modelo que forme la capacidad de representar las soluciones algebraicas en lenguaje de programación. Al parecer, la integración del aprendizaje de la programación con el algebraico es una meta especialmente importante que debe lograrse.

En síntesis, el proyecto, tal como se desarrolló, suministra información valiosa para el modelo en su conjunto y discrimina los efectos de cada una de las formas de representación. Los resultados son muy relevantes en el contexto de las tendencias de los sistemas de educación superior que propenden por formar la competencia de modelamiento como estrategia para proyectar los aportes de

la ciencia a la solución de problemas reales de las sociedad, en particular del sistema colombiano que se propone reducir la deserción universitaria y mejorar la calidad del desempeño de los profesionales formados.

Uno de los retos mayores para la pedagogía es facilitar la transferencia del aprendizaje. Inicialmente nos preguntamos por cuál de las condiciones genera mayor transferencia del aprendizaje a contextos nuevos. La respuesta no se inclina a favor de ninguno de los cuatro escenarios por separado, sino definitivamente por la integración de todos ellos. En efecto, sin análisis de contexto ni activación de conocimientos previos, es difícil visualizar la transferencia, pero sin la solución formal concreta tampoco; la diagramación es muy propicia por cuanto desarrolla metacognición sobre las estructuras de los procesos, y la simulación activa la visión prospectiva. Sin embargo, la integración de los cuatro componentes es mucho más eficiente que cada uno de los escenarios por separado.

El proyecto se interesa por la utilidad del sistema para la formación de una red de competencias matemáticas. Este proyecto es continuación de uno previo sobre el efecto de la argumentación en la formación de competencias matemáticas en el que tejimos colaboraciones alrededor del proyecto y se formó una red que se proyectó en este nuevo proyecto. De igual manera, somos conscientes de que hay un conjunto de factores que favorecen o dificultan la consolidación de redes que no forman parte de la cultura universitaria. La experiencia muestra que la web 2.0 tiene un potencial enorme en varios sentidos: la construcción de conocimiento mediante el diseño y desarrollo de proyectos colaborativos, la elaboración colaborativa de estados de la investigación sobre estas temáticas y el uso del sitio web como dispositivo de visibilidad, de comunicación y de gestión de los procesos curriculares. Sin embargo, somos conscientes de que en este campo se tiene que desarrollar más investigación que lleve a comprender procesos fundamentales.

# Índice de autores

## A

Alberts, Garstka, Hayes, & Signori 99  
Alfonso 149, 173, 195  
Alici y Edgar 43  
Allchin 42, 52  
Anasuk y Beyranevand 134  
Anderson y Krathwohl 144  
Atkins 24, 31

## B

Balci 48, 49, 50, 52  
Barro y Grossman 57, 62  
Bassanezi 156  
Begg, Fischer y Dornbusch 58  
Blomhøj y Højgaard Jensen 10, 13  
Blum et ál 156  
Blum y Borromeo 13  
Bravo 194  
Brito-Vallina et ál. 12  
Bunge 34, 52

## C

Camarena 117, 129  
Castro y Espinosa 26  
Chavalas 21, 31  
Cheng, Lowe, Scaife 22  
Clark 98, 113  
Clini 24, 31  
Collins, Brown y Newman, 98  
Colwell 35, 52  
Coyle 138, 147

## D

Dillenbourg 98, 99, 114  
Dillenbourg, Schneider y Synteta 98  
Dornbusch 57, 58, 72  
Duarte 152, 170  
Durán, Costaguta y Gola 154  
Duval 157

## E

Evans 59, 65, 66, 72

## F

Forrester 133, 138, 147  
Franklin 44, 45, 52

## G

Galor 65, 72  
García – Raffi 118  
Gärdenfors 78  
Gerda de Vries 116  
Gómez 118, 173  
González et ál. 176  
Gruber 100, 113  
Guarino 100, 114

## H

Hacking 44, 52  
Harris 191, 195  
Heath 22, 31  
Hegarty, Just & Morrison, 20, 22  
Hembree 134, 146  
Hempel 41, 52  
Hilera y Palomar 153  
Hoffman, Feltovich y Ford 10  
Holcombe 56, 72  
Holland et ál. 11

## J

Jonassen 19, 20, 81, 98  
Jordan 10, 16

## K

Kadijevich 152, 171  
Kaewsuwan 67, 72  
Kaput 133, 145, 157  
Kenneth Boulding 70  
Kerle, Corves, Mauersberger & Modler 23  
Kerle et ál. 28  
King 24, 25, 29, 32  
Kofman 150, 151, 171  
Kolodner & Leak 10  
Kuhn 40, 41, 53

## L

Larkin y Simon 134  
Laymon 41, 42  
Lesgold 13, 17  
Lesh y Doerr 20  
Llinas 75  
López 118, 129, 152, 171, 191, 195  
López Gómez 118  
Lucas 57, 72, 155

## M

Maldonado 3, 4, 9, 14, 17, 19, 32, 39, 53, 75, 76,  
82, 96, 98, 114, 131  
Maldonado, De Groot y Drachman 82  
Mariño y otros 153  
Mayer 14, 17, 132  
Mayorga 155  
Mays 20, 21, 32  
Mendible 151, 171  
Mishkin 57, 73  
Mon 22, 23  
Moon 26, 27, 28, 32  
Moreno y Mayer 14  
Múnera 156  
Mussa 57, 73  
Muth 57, 73

## N

Narayanan, Suwa y Motoda 135  
Nelson Nelson, Haan y Thomas 75  
Nersessian 19, 32, 52  
Neumaier 116, 117  
Newell, Shaw y Simon 132  
Newell y Simon 132, 142  
Norris et ál. 154

## O

OCDE 10, 17  
Ogden y Richards 39  
Oliveira 22, 32  
O'Reilly y Manakata, 76

## P

Pace et ál. 152  
Panasuk y Beyranevand 134  
Patten, y Campbell 75  
Pazos 154  
Peschard 41, 43, 53

## Q

Quine 77, 79, 96

## R

Ramsey 42, 53  
Richardson 140, 147  
Rodríguez 19, 97, 155, 157  
Roth 135, 145  
Russell y Norvig 132, 142

## S

Samuelson y Nordhaus 56  
Sánchez et ál. 118  
Sargent 37, 51, 53, 57, 73  
Schichl 34, 53  
Schlatter et ál. 45  
Schlatter, Malm, Brethouwer, Johansson y Hen-  
ningson 45  
Shannon y Johannes 34  
Shapere 45, 54  
Sommerville 188  
Sowa 76, 77, 79, 96

## T

Tomás et ál. 154  
Trigueros 129, 150, 171  
Turnitsa, Tolk y Padilla 40

## U

Uesaka, Manalo e Ichikawa 135, 145

## V

Van Essen y Hamaker 134  
Vergnaud 133, 145  
Vernon 150  
Vigotsky 77  
Villa-Ochoa 156  
Von Neumann y Goldstine 137

## W

Walsh 58, 73  
Walters 57, 73  
Wang y Sun, 14, 138  
Weggeman 100, 114  
Wolstenholme 138, 147

## X

Xiang, Kennedy y Madey 49

**E**l presente libro es el resultado de la ejecución de un proyecto en el cual experimentamos un escenario de representación múltiple: en primer lugar, la participación sincrónica que estimula el análisis de contexto, la adquisición y organización de información y la búsqueda de alternativas a la solución de problemas de modelamiento; en segundo lugar, la estructuración algebraica de la solución que se transforma mediante operadores matemáticos hasta encontrar una solución; en tercer lugar, la representación diagramática, que permite fundamentar comparaciones analógicas y estructurales; por último, la representación en lenguaje de computador, que muestra el algoritmo de la solución.

Los capítulos en que está organizado este libro giran alrededor de este planteamiento y aspiran a alimentar la discusión interdisciplinar sobre estrategias para formar la capacidad de modelar de los estudiantes de ingeniería en sus cursos de matemáticas. Una base incipiente para la extensión de esta experiencia y para la aplicación de sus corolarios a otras materias y disciplinas –por ejemplo, la capacidad de modelar en biología, ciencias del medio ambiente, ciencias sociales, etc.– surge naturalmente como contribución adicional de este estudio.



UNIVERSIDAD  
CENTRAL