



Investigación de operaciones y logística

Ejercicios y aplicaciones
de estudio en tiempos
de **pandemia**

Jainet Orlando Bernal Orozco
Luis Felipe Jiménez Sánchez
Óscar Mauricio Cepeda Valero



UNIVERSIDAD
CENTRAL



Investigación de operaciones y logística

Ejercicios y aplicaciones
de estudio en tiempos
de **pandemia**

Jainet Orlando Bernal Orozco
Luis Felipe Jiménez Sánchez
Óscar Mauricio Cepeda Valero



UNIVERSIDAD
CENTRAL

COMITÉ EDITORIAL

Adolfo José Naranjo Parra
Sandra Milena Gamboa Moreno
Aliex Trujillo García
Gastón Mejía Arias
Leticia Fernández Marín
Héctor Sanabria Rivera

Rector

Jaime Arias Ramírez

Vicerrector académico

Oscar Leonardo Herrera Sandoval

Vicerrectora administrativa y financiera

Paula Andrea López López

Vicerrector de programas

Jorge Hernán Gómez Cardona

Esta es una publicación del programa de Ingeniería Industrial de la Facultad de Ingeniería y Ciencias Básicas.

Adolfo José Naranjo Parra
Decano

Gustavo Adolfo Neira González
Director del programa de Ingeniería Industrial

DOI:

ISBN(PDF): 978-958-26-0492-9

Primera edición: 2021

© Autores: Jainet Orlando Bernal Orozco,
Óscar Mauricio Cepeda Valero
y Luis Felipe Jiménez Sánchez

© Ediciones Universidad Central
Calle 21 n.º 5-84 (4.º piso).
Bogotá, D. C., Colombia
editorial@ucentral.edu.co

Catalogación en la publicación Universidad Central

Bernal Orozco, Jainet Orlando, autor.

Investigación de operaciones y logística. Ejercicios y aplicaciones de estudio en tiempos de pandemia / autores Jainet Orlando Bernal Orozco, Luis Felipe Jiménez Sánchez, Óscar Mauricio Cepeda Valero -- Primera edición -- Bogotá : Universidad Central, 2021.

1 recurso en línea (204 páginas) : ilustraciones.

Colección buenas notas 2.0.

Incluye referencias bibliográficas.

DOI: <https://doi.org/10.30578/9789582604929>

ISBN: 978-958-26-0492-9 (PDF)

1. Investigación operacional - Estudio de casos 2. COVID-19 (Enfermedad) - Aspectos sociales 3. Logística empresarial - Estudio de casos 4. Procesos de Markov - Problemas, ejercicios, etc. 5. Programación lineal - Problemas, ejercicios, etc. I. Jiménez Sánchez, Luis Felipe, autor II. Cepeda Valero, Oscar Mauricio, autor III. Universidad Central (Bogotá, Colombia). Facultad de Ingeniería y Ciencias Básicas.

658.4034 - dc23

PTBUC/09-09-2021

Editorial - CRAI

Editor: Héctor Sanabria Rivera
Asistente editorial: Nicolás Rojas Sierra
Diseño y diagramación: Patricia Salinas Garzón
Corrección de textos: Javier Carrillo Zamora
Cubierta: Patricia Salinas Garzón
Imagen de cubierta: freepik.es

Publicado en Colombia - Published in Colombia



Este texto es publicado de acuerdo con los términos de la licencia Creative Commons Reconocimiento-NoComercial-SinDerivadas (CC BY-NC-ND). Usted es libre de copiar o redistribuir el material en cualquier medio o formato, siempre y cuando dé los créditos apropiadamente, no lo haga con fines comerciales y no realice obras derivadas.

Jainet Orlando Bernal Orozco

Magíster con énfasis en investigación de operaciones y estadística, e ingeniero industrial. Nació en 1982 en Bogotá, ciudad que lo vio crecer y formarse como persona. Su principal área de desempeño es la optimización, orientada al mejoramiento de la logística urbana (centrada en el ciudadano) y al mejoramiento de procesos en instituciones de educación superior. Apasionado por la vida, por viajar, aprender, contribuir a transformar su entorno y por transmitir sus experiencias y conocimientos. Es docente universitario hace diecisiete años, consultor e investigador con apoyo de otros profesores y estudiantes. Persona de baja visión, pero con una capacidad por ver hacia adelante, sobreponerse a limitaciones, prepararse y planear su futuro y el de su familia, en busca de seguir siendo feliz.

Correo: jbernal01@ucentral.edu.co

Luis Felipe Jiménez Sánchez

Magíster en educación y magíster en políticas públicas de la Universidad de los Andes, e ingeniero industrial de la Universidad Central. Cuenta con algunas insignias certificadas en análisis de datos y *machine learning*. Ha sido profesor de cátedra de la Facultad de Ingeniería y Ciencias Básicas de la Universidad Central, la Facultad de Administración de la Universidad de los Andes y la Escuela de Ciencias Administrativas de la Corporación Unificada Nacional de Educación Superior (CUN), en asignaturas relacionadas con investigación de operaciones, procesos estocásticos, modelamiento matemático, herramientas estadísticas y econométricas para toma de decisiones, tecnologías de la información en las organizaciones, entre otras. También ha publicado en revistas indexadas sobre la gestión de inventarios, el análisis de redes sociales y política pública para educación superior. Su agenda de investigación está centrada en el modelamiento matemático para solución de problemas en organizaciones y la gestión de la educación superior.

Correo: ljimenezs2@ucentral.edu.co

Óscar Mauricio Cepeda Valero

Magíster en ingeniería industrial con área de especialización en investigación de operaciones y estadística de la Universidad de los Andes; ingeniero industrial de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas, y químico de la Universidad Nacional de Colombia, sede Bogotá. Es docente en el programa de Ingeniería Industrial de la Universidad Central en áreas de logística y desarrollo de productos. Ha participado en varios proyectos de investigación con los cuales ha publicado en revistas académicas de Chile, Argentina, México, Venezuela y Colombia en temáticas de logística, modelamiento matemático y emprendimiento. Actualmente cursa sus estudios doctorales en la Universidad de los Andes investigando la dinámica entre la infraestructura de transporte y la distribución de las ciudades.

Correo: ocepedav@ucentral.edu.co

Contenido

Presentación	9
Capítulo 1. Programación lineal	12
Ejercicio 1.1 Producción de desinfectantes.....	14
Solución ejercicio 1.1	14
Ejercicio de aplicación 1.1.....	16
Ejercicio 1.2 Inversiones para apoyo social.....	17
Solución ejercicio 1.2	17
Ejercicio de aplicación 1.2.....	19
Ejercicio 1.3 Asignación de profesionales de la salud a turnos de trabajo	20
Solución ejercicio 1.3	20
Ejercicio de aplicación 1.3.....	24
Ejercicio 1.4 Producción de trajes de bioseguridad	25
Solución ejercicio 1.4	25
Ejercicio de aplicación 1.4.....	28
Ejercicio 1.5 Distribución y transporte de mercados a población vulnerable....	29
Solución ejercicio 1.5	30
Ejercicio de aplicación 1.5.....	34
Ejercicio 1.6 Transporte de pruebas rápidas para diagnosticar COVID-19.....	35
Solución ejercicio 1.6	37
Ejercicio de aplicación 1.6.....	39

Ejercicio 1.7 Producción y distribución de la vacuna contra la COVID-19.....	40
Solución ejercicio 1.7	42
Ejercicio de aplicación 1.7	51
Ejercicio 1.8 Producción y distribución de respiradores	52
Solución ejercicio 1.8	53
Ejercicio de aplicación 1.8.....	56
Ejercicio 1.9 Mercados entregados por los Centros de Acopio para la Solidaridad	57
Solución ejercicio 1.9	58
Ejercicio de aplicación 1.9	60
Ejercicio 1.10 Ensamble de mercados entregados por los Centros de Acopio para la Solidaridad	64
Solución ejercicio 1.10	65
Ejercicio de aplicación 1.10	68
Ejercicio 1.11 Compra de productos para ensamble de mercados entregados por los Centros de Acopio para la Solidaridad	72
Ejercicio de aplicación 1.11	73
Ejercicio 1.12 Optimización del nivel de satisfacción en procesos de compra de alimentos en tiempos de pandemia.....	79
Solución ejercicio 1.12	80
Ejercicio de aplicación 1.12	82
Ejercicio 1.13 Selección de proyectos para el desarrollo de comunidades en el marco de los planes de desarrollo distritales	86
Ejercicio de aplicación 1.13	87
Capítulo 2. Cadenas de Markov	91
Ejercicio 2.1 Uso de cadenas de Markov para estimar la tasa de producción con intermitencia laboral – Parte I.....	93
Solución ejercicio 2.1	93
Ejercicio de aplicación 2.1	94
Ejercicio 2.2 Uso de cadenas de Markov para estimar la tasa de producción con intermitencia laboral – Parte II.....	95
Solución ejercicio 2.2	96
Ejercicio de aplicación 2.2	98
Ejercicio 2.3 Restricción a la movilidad de personas a causa de la pandemia ...	99
Solución ejercicio 2.3	99
Ejercicio de aplicación 2.3	100

Ejercicio 2.4 Prueba de COVID-19 usando pruebas serológicas.....	101
Solución ejercicio 2.4	102
Ejercicio de aplicación 2.4.....	103
Ejercicio 2.5 Modelando el acatamiento de la restricción a la movilidad de personas instaurada por alcaldías.....	104
Solución ejercicio 2.5	105
Ejercicio de aplicación 2.5.....	105
Ejercicio 2.6 Modelando los contagios de COVID-19	107
Solución ejercicio 2.6	107
Ejercicio de aplicación 2.6.....	108
Capítulo 3. Logística	109
Descripción caso de estudio 3.1.....	113
Ejercicio 3.1 Construcción de malla de distribución de ayudas (ruta más corta)	117
Solución ejercicio 3.1. Algoritmo de Floyd Warshall.....	117
Ejercicio de aplicación 3.1	123
Ejercicio 3.2 Determinación de puntos de distribución de mercados.....	125
Solución ejercicio 3.2. Planeación de localización (método ADD sin restricciones)	125
Solución ejercicio 3.2. Planeación de localización (método ADD con restricciones)	134
Ejercicio de aplicación 3.2	139
Ejercicio 3.3 Selección de rutas de importación de ayudas	141
Solución ejercicio 3.3. Planeación de importación (método selección de modo).....	141
Ejercicio de aplicación 3.3	154
Descripción caso de estudio 3.2.....	154
Ejercicio 3.4 Planeación de inventario de mercados	158
Solución ejercicio 3.4. Planeación de inventarios (método de una bodega y múltiples minoristas - Schwarz).....	158
Ejercicio de aplicación 3.4.....	154
Ejercicio 3.5 Planeación de rutas de distribución de mercados.....	166
Solución ejercicio 3.5. Modelo de ruteo Clarke & Wright.....	166
Ejercicio de aplicación 3.5.....	179
Ejercicio 3.6 Organización de ayudas en un almacén	180
Solución ejercicio 3.6. Organización de bodega por el índice COI.....	180
Ejercicio de aplicación 3.6.....	184

Ejercicio 3.7 Transporte de pruebas rápidas para diagnosticar COVID-19.....	186
Solución ejercicio 3.7.....	187

Capítulo 4. Respuestas de los ejercicios de aplicación 191

Capítulo 1 Programación lineal	192
Ejercicio de aplicación 1.1	192
Ejercicio de aplicación 1.2	192
Ejercicio de aplicación 1.3	192
Ejercicio de aplicación 1.4	193
Ejercicio de aplicación 1.5	193
Ejercicio de aplicación 1.6	195
Ejercicio de aplicación 1.7	195
Ejercicio de aplicación 1.8	196
Ejercicio de aplicación 1.9	196
Ejercicio de aplicación 1.10	196
Ejercicio de aplicación 1.11	196
Ejercicio de aplicación 1.12	196
Ejercicio de aplicación 1.13	197
Capítulo 2 Cadenas de Markov	198
Ejercicio de aplicación 2.1	198
Ejercicio de aplicación 2.2	198
Ejercicio de aplicación 2.3	198
Ejercicio de aplicación 2.4	198
Ejercicio de aplicación 2.5	199
Ejercicio de aplicación 2.6	199
Capítulo 3 Logística	200
Ejercicio de aplicación 3.1	200
Ejercicio de aplicación 3.2	200
Ejercicio de aplicación 3.3	201
Ejercicio de aplicación 3.4	202
Ejercicio de aplicación 3.5	202
Ejercicio de aplicación 3.6	202
Referencias.....	203

Presentación

La pandemia de COVID-19 ha generado impactos que con seguridad se documentarán en los libros de historia entre las tragedias mundiales. Además de las miles de muertes causadas y los millones de personas infectadas en todo el mundo, se observan otras consecuencias como la tasa de desempleo del 14,7 % en Estados Unidos durante el año 2020, una cifra que no se había visto desde la Segunda Guerra Mundial (Casselman & Schwartz, 2020). En Colombia, esta tasa llegó en el mismo año al 21,4 %, lo que implica un aumento cercano al 10 % en comparación con el año anterior (Jaramillo, 2020). Adicionalmente, en Colombia se han generado pérdidas entre los 4,6 y los 59 billones de pesos por mes, que representan el 0,5-6,1 % del PIB nacional (Bonet-Morón *et al.*, 2020). Por su parte, el sector agricultura se ha visto afectado con caídas del 20 % en el precio de sus productos y se ha observado una disminución en la demanda de turismo y restaurantes, de manera que cerca de 50 millones de puestos de trabajo se encuentran en riesgo (Nicola *et al.*, 2020). Asimismo, nuevas medidas han tenido que implementarse para la protección de los trabajadores de la salud.

Con esta situación, las organizaciones públicas y privadas deben enfrentarse a una nueva dinámica y responder de una manera eficiente para resistir el impacto económico y generar el mayor beneficio social. Sin embargo, la complejidad de los diferentes factores se convierte en un reto para los profesionales que se dedican a la asignación de recursos en la

industria, la logística y la administración de programas sociales. La crisis ha generado cambios en los estilos de vida de las personas, problemas económicos, dificultad en el diseño de políticas públicas eficientes y costoefectivas, y una sensación de desesperanza generalizada. Para los profesionales de todas las áreas del conocimiento, esto significa un llamado a dar respuestas y soluciones útiles para todas las personas.

En este contexto, la presente obra plantea una serie de situaciones típicas a las que se están enfrentando los distintos actores sociales. El objetivo es brindar ejercicios prácticos y herramientas a los estudiantes, profesores y profesionales de la ingeniería industrial y de cualquier otra área que desean ampliar su conocimiento y entrenar sus capacidades de modelamiento matemático en algunas áreas de la investigación de operaciones y la logística, de manera que puedan hacer frente a las problemáticas actuales.

Este libro nació de la coyuntura de varios factores. En principio, la experiencia de más de cinco años como docentes en los cursos Investigación de Operaciones y Logística del pregrado en Ingeniería Industrial nos permitió compilar un conjunto de ejercicios y casos como apoyo didáctico en nuestras clases. Por otro lado, somos sensibles a la situación que el mundo atraviesa y buscamos ofrecer herramientas para apoyar la toma de decisiones basadas mayoritariamente en la evidencia formal de las matemáticas y la ciencia en general. Asimismo, deseamos posibilitar un acercamiento a temáticas como la programación lineal, las cadenas de Markov, la heurística y los algoritmos en la logística, de tal manera que distintos actores de los sectores público y privado puedan comprender el alcance de las aplicaciones.

De este modo, se ha diseñado un libro enfocado en la práctica y aplicación de conceptos a partir de casos asociados a la pandemia, específicamente, situaciones que están viviendo los gobiernos, las empresas y la población en general. Sin embargo, aunque el libro se ha diseñado en el contexto actual de pandemia, también pretende ser una herramienta accesible a todo público que quiera mejorar sus habilidades en pensamiento lógico crítico, modelamiento matemático, interpretación de resultados y toma de decisiones en diferentes situaciones.

La obra está compuesta por tres capítulos que abarcan temáticas generales de modelamiento matemático y un cuarto con las respuestas a los ejercicios

planteados. En cada ejercicio, primero se enuncia un caso; después se presenta una posible solución al caso a partir de modelos matemáticos y distintos *softwares*, y posteriormente se propone una aplicación del caso que permite poner en práctica los conceptos leídos. El nivel de complejidad de los ejercicios aumenta conforme se avanza en los capítulos.

En el primer capítulo se desarrollan aplicaciones de programación lineal con enfoque en la formulación de modelos de manera explícita y compacta, los cuales se complementan con métodos de solución en los *softwares* General Algebraic Management System (GAMS) y Solver de Excel. El segundo capítulo se enfoca en los usos de las cadenas de Markov en tiempos discretos, para eventos de incertidumbre o con variaciones probabilísticas. El tercer capítulo desarrolla metodologías comunes de la logística a partir de variaciones del caso que han venido enfrentando los gobiernos en la distribución de ayudas a las diferentes comunidades impactadas por la pandemia. Las soluciones parten del uso de diferentes métodos heurísticos para responder de maneras adecuadas pero diferenciadas. Finalmente, el cuarto capítulo incluye las respuestas a los ejercicios de aplicación propuestos. Toda esta estructura ofrece un método de entrenamiento que permite decidir sobre el propio proceso de aprendizaje.

Agradecemos a todas las personas que han contribuido al diseño y la construcción de este libro. Para nombrarlas a todas seguramente necesitaríamos un largo listado. Sin embargo, queremos mencionar de manera especial a la Editorial y a la Dirección del Programa de Ingeniería Industrial de la Universidad Central. Esta obra está dedicada a todos nuestros estudiantes, quienes nos han motivado a mejorar nuestros diseños y metodologías de enseñanza; este libro es para ustedes y para todos los que creen que la ingeniería industrial y los modelos matemáticos pueden contribuir a resolver los grandes problemas que aquejan al mundo.

LOS AUTORES



Programación lineal

En tiempos de pandemia, la escasez de recursos y la logística de asignación generan dilemas que, de no enfrentarse con evidencia —la cual puede provenir de distintas fuentes—, pueden tener consecuencias negativas para la salud y la vida. En este capítulo se hará uso de la programación lineal para abordar ciertas situaciones relacionadas con estas disyuntivas.

La programación lineal es una herramienta matemática que ayuda a soportar decisiones de asignaciones y usos de recursos tecnológicos, físicos, financieros y humanos. En este apartado se analizarán problemáticas que tienen que ver con la producción de medicamentos, vacunas, asignación de talento humano a turnos de trabajo en hospitales, entidades públicas de ayuda y emergencia, diseño de líneas de producción seguras, distribución y

Contenido

- Ejercicio 1.1
- Ejercicio 1.2
- Ejercicio 1.3
- Ejercicio 1.4
- Ejercicio 1.5
- Ejercicio 1.6
- Ejercicio 1.7
- Ejercicio 1.8
- Ejercicio 1.9
- Ejercicio 1.10
- Ejercicio 1.11
- Ejercicio 1.12
- Ejercicio 1.13

transporte de mercancía de primera necesidad, ayudas sociales, entre otras.

Esta sección está organizada a partir de un caso que se modela con una estrategia de modelación matemática de programación lineal, se soluciona mediante un *software*, ya sea General Algebraic Management System (GAMS) o Solver de Microsoft Excel, y se propone una aplicación. De esta manera, el lector podrá poner en práctica sus conocimientos y desarrollar experticia en el manejo de la herramienta matemática.

Ejercicio 1.1

Producción de desinfectantes

Desinfecciones 2020 S. A. S. es una empresa dedicada a la fabricación de productos para la prevención del contagio de COVID-19. Teniendo en cuenta que la empresa puede recibir hasta 50 000 m³ de alcohol, el gerente de producción ha decidido que por lo menos 30 000 m³ sean embotellados diariamente y el resto se use en la producción de gel desinfectante o *spray* de uso personal. Cada litro de alcohol embotellado genera una utilidad de COP 100, en gel desinfectante genera COP 150, y en *spray* de uso personal, COP 160.

Ahora bien, la planta de producción está dividida en tres líneas: la línea de *spray* personal puede manejar hasta 6000 m³ diarios de alcohol; la línea de envase puede manejar hasta 40 000 litros diarios, y la línea de gel desinfectante puede procesar 20 000 m³ por día. Se sabe que por cada tres partes de alcohol usados para la producción de *spray* personal, una parte debe ser destinada a la producción de gel.

Desinfecciones 2020 S. A. S. desea conocer la cantidad de metros cúbicos de alcohol que deben ser empacados para la producción en gel y de *spray* de tal manera que se maximice la ganancia.

Solución ejercicio 1.1

Para resolver este ejercicio, se realiza un modelo matemático explícito de programación lineal, en el que inicialmente se definen los conjuntos y las variables de decisión.

Conjuntos

i es el conjunto de los productos $\left\{ \begin{array}{l} \text{alcohol embotellado,} \\ \text{gel desinfectante,} \\ \text{spray personal} \end{array} \right\}$

Variables de decisión

x_i es el número de litros de alcohol destinados para producir el producto i

Modelo matemático

La función objetivo (F. O.) del problema es maximizar las utilidades de la empresa Desinfecciones 2020 S. A. S. Esta función se basa en una formulación típica de ingreso:

F. O.:

$$\text{Max(utilidad)} = 100x_1 + 150x_2 + 160x_3$$

Restricciones:

La primera restricción del problema se relaciona con los litros de alcohol totales que recibe la empresa:

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 50\,000$$

Ahora, se debe asegurar que al menos 30 000 litros de alcohol sean destinados para embotellamiento:

$$x_1 \geq 30\,000$$

Posteriormente, se escriben las restricciones relacionadas con la capacidad de producción de cada una de las líneas. Las ecuaciones se muestran por orden de líneas, es decir, 1, 2 y 3:

$$x_1 \leq 40\,000$$

$$x_2 \leq 20\,000$$

$$x_3 \leq 6\,000$$

Finalmente, se debe asegurar la proporción, es decir, que por cada tres partes del alcohol destinado a la producción del *spray* personal, una parte sea para el gel desinfectante:

$$3x_3 = x_2$$

Restricción de no negatividad:

$$x_1; x_2; x_3 \geq 0$$

Al usar el *software* GAMS según el código 1.1, se encuentra que la utilidad máxima es de COP 6 050 000 y se deben destinar 30 000 litros de alcohol para empaquetar, 15 000 litros para producir gel y 5000 litros para producir *spray* personal.

Código 1.1:

```

variables
x1, x2, x3, utilidad;
positive variables
x1, x2, x3;
free variables
utilidad;
equations
fo función objetivo
r1 restricción del número de litros que le llegan a la
empresa
r2 restricción de alcohol destinado a embotellado
r3 restricción de la línea 1
r4 restricción de la línea 2
r5 restricción de la línea 3
r6 restricción de relación entre Spray y Gel
;
fo.. utilidad =e= 100*x1 + 150*x2 + 160*x3;
r1.. x1 + x2 + x3 =l= 50000;
r2.. x1 =g= 30000;
r3.. x1 =l= 40000;
r4.. x2 =l= 20000;
r5.. x3 =l= 60000;
r6.. 3*x3 =e= x2;
Model desinfecciones /All/
Solve desinfecciones using LP maximizing utilidad;
display x1.1, x2.1, x3.1, utilidad.1;
  
```

Ejercicio de aplicación 1.1

¿Cómo cambiaría el modelo matemático y la solución si, debido a la demanda internacional de alcohol, la empresa solo pudiera recibir 40 000 litros de alcohol?

Ejercicio 1.2

Inversiones para apoyo social

El Gobierno nacional ha recibido la propuesta de cuatro proyectos para realizar labores sociales con las personas que han perdido familiares a causa de la COVID-19. La tabla 1.1 muestra los beneficios sociales marginales y el costo de implementación de cada proyecto. Si el Gobierno cuenta con 44 billones de pesos colombianos, ¿cuáles proyectos debería elegir?

Tabla 1.1. Proyectos con su beneficio marginal social y costo

Proyecto	BMg social	Costo (COP)
Mercados	12	3
Pago de arriendos	15	12
Préstamos para negocios	35	32
Pago de servicios funerales	9	3

Solución ejercicio 1.2

Para la solución del ejercicio se empleó una formulación explícita y se usaron variables binarias.

Conjuntos

$$i \text{ son los proyectos } \left\{ \begin{array}{l} \text{Mercados, Pago de arriendos,} \\ \text{Préstamos para negocios,} \\ \text{Pago de servicios funerales} \end{array} \right\}$$

Variables de decisión

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{si se invierte en el proyecto } i \\ 0 & \text{sino} \end{cases}$$

Modelo matemático

El objetivo del problema es generar el máximo beneficio marginal social; por tanto, se define la función objetivo como:

F. O.:

$$\text{Max}(BmgS) = 12x_1 + 15x_2 + 35x_3 + 9x_4$$

Restricciones:

Dado que solo se cuenta con un capital de 44 billones de pesos colombianos, existe una restricción para invertir en los proyectos que se escribe así:

$$3x_1 + 12x_2 + 32x_3 + 3x_4 \leq 44$$

Restricción de no negatividad:

$$x_i \geq 0$$

Luego de operar el modelo en GAMS con el código 1.2, se obtiene que el beneficio marginal social adquirido en la inversión de los proyectos es de 56 y hay que invertir en los proyectos de mercados, préstamos de negocios y pago de servicios funerales. No se debe invertir en el proyecto de arriendos.

Código 1.2:

```

variables
x1,x2,x3,x4,Bmg;
binary variables
x1,x2,x3,x4;
free variables
Bmg;
Equations
fo función objetivo
r1 restricción de la inversión
;
fo.. Bmg =e= 12*x1+15*x2+35*x3+9*x4;
r1.. 3*x1 + 12*x2 + 32*x3 + 3*x4 =l= 44;
Model proyectos /all/
Solve proyectos using MIP maximizing Bmg;
Display x1.1,x2.1,x3.1,x4.1,Bmg.1;
  
```

Ejercicio de aplicación 1.2

¿Cómo cambiaría el modelo matemático con la condición de que si se invierte en el proyecto de pago de mercados, se debe invertir en el proyecto de pagos de arriendos? ¿Cuál es el nuevo beneficio marginal social?

Ejercicio 1.3

Asignación de profesionales de la salud a turnos de trabajo

El planificador del Hospital Meisino debe organizar los turnos de los médicos que atienden pacientes con posibilidad de infección por COVID-19. Determine el coste mínimo de personal para el hospital sabiendo que:

- La jornada laboral consta de tres turnos.
- En cada turno debe haber al menos un médico, tres enfermeras y tres auxiliares de clínica.
- El número mínimo de empleados que se requiere en cada turno es diez.
- Los salarios son: COP 200 000 por turno para un médico, COP 120 000 por turno para un enfermero y COP 40 000 por turno para un auxiliar de clínica.
- El número total de empleados es: 15 médicos, 36 enfermeras y 49 auxiliares de clínica.
- Cada empleado debe descansar dos turnos consecutivos.

Solución ejercicio 1.3

En la solución de este ejercicio se hará uso de la notación sigma o formulación indexada y se emplearán variables binarias.

Conjuntos

i son los médicos {1 * 15}

j son los enfermeros {1 * 36}

k son los auxiliares de clínica {1 * 49}

t son los turnos {1 * 3}

Variables de decisión

$$\begin{aligned}
 x_{it} &= \begin{cases} 1 & \text{si se asigna el médico } i \text{ al turno } t \\ 0 & \text{si no} \end{cases} \\
 y_{jt} &= \begin{cases} 1 & \text{si se asigna el enfermero } j \text{ al turno } t \\ 0 & \text{si no} \end{cases} \\
 z_{kt} &= \begin{cases} 1 & \text{si se asigna el auxiliar de clínica } k \text{ al turno } t \\ 0 & \text{si no} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Parámetros

$Salme_i$ es el salario por turno que devenga el médico i

$Salen_j$ es el salario por turno que devenga el enfermero j

$Salaux_k$ es el salario por turno que devenga el auxiliar de clínica k

$Reqmed_t$ es el requerimiento de los médicos en cada turno t

$Reqenf_t$ es el requerimiento de los enfermeros en cada turno t

$Reqaux_t$ es el requerimiento de los auxiliares de clínica en cada turno t

Nes_t es el total de profesionales requeridos en cada turno t

Modelo matemático

El objetivo del problema es minimizar los costos de contratación, por lo que se requiere establecer cuáles y cuántos profesionales se asignan a cada turno. Para ello, se debe plantear:

F. O.:

$$\begin{aligned}
 \text{Min}(C) &= \sum_{i \in I} \sum_{t \in T} x_{it} Salme_i \\
 &\quad + \sum_{j \in J} \sum_{t \in T} y_{jt} Salen_j \\
 &\quad + \sum_{k \in K} \sum_{t \in T} z_{kt} Salaux_k
 \end{aligned}$$

Restricciones:

Ahora, se debe cumplir que en cada turno debe haber al menos un médico, tres enfermeras y tres auxiliares de clínica; luego se plantean las siguientes restricciones:

$$\sum_{i \in I} x_{it} \geq Reqmed_t \quad \forall t$$

$$\sum_{j \in J} y_{jt} \geq Reqenf \quad \forall t$$

$$\sum_{k \in K} z_{kt} \geq Reqaux_t \quad \forall t$$

Por otro lado, hay que considerar que el número mínimo de empleados que se requiere en cada turno es diez. Para cumplir dicha restricción, se establece que:

$$\sum_{i \in I} x_{it} + \sum_{j \in J} y_{jt} + \sum_{k \in K} z_{kt} \geq Nes_t \quad \forall t$$

Finalmente, para asegurar que cada empleado descanse dos turnos consecutivos, se plantean tres restricciones de la siguiente forma:

$$x_{it} + x_{i1} + x_{i3} = 1 \quad \forall i \text{ y } \forall t$$

$$y_{jt} + x_{j2} + x_{j3} = 1 \quad \forall j \text{ y } \forall t$$

$$z_{kt} + z_{k2} + z_{k3} = 1 \quad \forall i \text{ y } \forall t$$

Restricción de no negatividad:

$$x_{it} \in \{0,1\}$$

$$y_{jt} \in \{0,1\}$$

$$z_{kt} \in \{0,1\}$$

Una vez se soluciona este modelo matemático en GAMS (código 1.3), se encuentra que el costo mínimo de contratación es de COP 2 400 000 en los tres turnos. Adicionalmente, se sugiere una asignación de turnos como muestra la tabla 1.2. Nótese que cada turno quedó asignado a diez profesionales.

Tabla 1.2. Asignación de turnos de los profesionales de la salud

Turno 1	Turno 2	Turno 3
Médico 10	Médico 14	Médico 1
Enfermera 24	Enfermera 22	Enfermera 19
Enfermera 25	Enfermera 23	Enfermera 20
Enfermera 27	Enfermera 26	Enfermera 21
Auxiliar de clínica 9	Auxiliar de clínica 3	Auxiliar de clínica 13
Auxiliar de clínica 10	Auxiliar de clínica 17	Auxiliar de clínica 14
Auxiliar de clínica 11	Auxiliar de clínica 19	Auxiliar de clínica 15
Auxiliar de clínica 12	Auxiliar de clínica 20	Auxiliar de clínica 18
Auxiliar de clínica 16	Auxiliar de clínica 21	Auxiliar de clínica 33
Auxiliar de clínica 37	Auxiliar de clínica 23	Auxiliar de clínica 36

Código 1.3:

```

sets
i son los médicos /1*15/
j son los enfermeros /1*36/
k son los auxiliares /1*49/
t son los turnos /1*3/
;
variables
x(i,t) si se asigna el médico i al turno t
y(j,t) si se asigna la enfermera j al turno t
z(k,t) si se asigna la enfermera k al turno t
costo;
binary variables
x(i,t), y(j,t), z(k,t);
free variables
costo;
equations
fo es la función objetivo
r1(t) es la restricción para requerimiento de médicos
r2(t) es la restricción para requerimiento de enfermeros
r3(t) es la restricción para requerimiento de auxiliares de
clínica
r4(t) es la restricción para el mínimo de profesionales en
el turno
r5(i) es la restricción de 2 turnos consecutivos de
descanso para médicos
r6(j) es la restricción de 2 turnos consecutivos de
descanso para enfermeros
  
```

```
r7(k) es la restricción de 2 turnos consecutivos de
descanso para auxiliares de clínica
;
fo..      costo =e=
200000*sum((i,t),x(i,t))+120000*sum((j,t),y(j,t))+40000*sum
((k,t),z(k,t));
r1(t)..   sum((i),x(i,t)) =g= 1;
r2(t)..   sum((j),y(j,t)) =g= 3;
r3(t)..   sum((k),z(k,t)) =g= 3;
r4(t)..   sum((i),x(i,t))+sum((j),y(j,t))+sum((k),z(k,t))
=g= 10;
r5(i)..   x(i,'1')+x(i,'2')+x(i,'3') =l= 1;
r6(j)..   y(j,'1')+y(j,'2')+y(j,'3') =l= 1;
r7(k)..   z(k,'1')+z(k,'2')+z(k,'3') =l= 1;
model meisino /all/

solve meisino using mip minimizing costo;
display x.l, y.l, z.l, costo.l;
```

Ejercicio de aplicación 1.3

¿Cómo cambiaría el modelo matemático y la solución si se solicita que todos los profesionales trabajen dos de los tres turnos?

Ejercicio 1.4

Producción de trajes de bioseguridad

Una empresa que se dedica a la producción de trajes de bioseguridad para trabajadores de la salud tiene cuatro referencias: BioseguridadL23, BioseguridadL24, BioseguridadL33 y BioseguridadL34. Todas las referencias se elaboran en cuatro departamentos diferentes: corte, combinados, costura y empaque. La empresa ha recibido pedidos de sus productos y, dada la coyuntura de los hospitales, se estipuló una penalización por no cumplir con la demanda. Para ello, se solicita diseñar un plan de producción óptimo para la compañía con base en los datos de la tabla 1.3.

Tabla 1.3. Información sobre los procesos para cada producto, capacidad y demanda

Proceso	Bioseguridad L23	Bioseguridad L24	Bioseguridad L33	Bioseguridad L34	Capacidad (horas)
Corte	0,43	0,3	0,22	0,25	1500
Combinados	0,15	0,18	0,28	0,1	1500
Costura	0,25	0,35	0,35	0,22	1500
Empaque	0,32	0,4	0,15	0,07	1500
Precio de venta unitario	COP 80 600	COP 93 500	COP 53 800	COP 36 800	
Penalización por unidad no entregada	COP 42 200	COP 52 200	COP 22 400	COP 11 250	
Demanda	950	800	700	300	

Solución ejercicio 1.4

Para resolver este ejercicio se formuló un modelo matemático de programación lineal de manera explícita.

Conjuntos

i son los productos $\{BioseguridadL23, BioseguridadL24, BioseguridadL33, BioseguridadL34\}$

Variables de decisión

x_1 es el número de unidades producidas del traje BioseguridadL23

x_2 es el número de unidades producidas del traje BioseguridadL24

x_3 es el número de unidades producidas del traje BioseguridadL33

x_4 es el número de unidades producidas del traje BioseguridadL34

Modelo matemático

El objetivo de la empresa es maximizar las utilidades, por lo que se plantea una función objetivo de la forma ingresos menos costos:

F. O.:

$$\begin{aligned}
 \text{Max}(U) = & (80\,600x_1 + 93\,500x_2 + 53\,800x_3 + 36\,800x_4) \\
 & - (42\,200x_1 + 52\,200x_2 + 22\,400x_3 + 11\,250x_4)
 \end{aligned}$$

Restricciones:

En la producción de los trajes de bioseguridad existe una limitación en cada uno de los procesos, ya que la empresa solo cuenta con un número de horas disponibles. Por esto, se debe agregar las siguientes restricciones:

$$0,43x_1 + 0,3x_2 + 0,22x_3 + 0,25x_4 \leq 1500 \text{ (Corte)}$$

$$0,15x_1 + 0,18x_2 + 0,28x_3 + 0,1x_4 \leq 1500 \text{ (Combinados)}$$

$$0,25x_1 + 0,35x_2 + 0,35x_3 + 0,22x_4 \leq 1500 \text{ (Costura)}$$

$$0,32x_1 + 0,4x_2 + 0,15x_3 + 0,07x_4 \leq 1500 \text{ (Empaque)}$$

Finalmente, se debe asegurar que se cumpla con la demanda, por lo que se deben considerar estas restricciones:

$$x_1 \geq 950$$

$$x_2 \geq 800$$

$$x_3 \geq 700$$

$$x_4 \geq 300$$

Restricción de no negatividad:

$$x_i \geq 0$$

Al solucionar el modelo matemático en el *software* GAMS (código 1.4), se halla que la utilidad máxima es de COP 179 954 915. De esta manera, se deben producir 1130,48 unidades del traje BioseguridadL23; 2507,83 unidades del traje BioseguridadL24; 700 unidades del BioseguridadL33, y 430,17 unidades del BioseguridadL34.

Código 1.4:

```

variables
x1,x2,x3,x4,u;
positive variables
x1,x2,x3,x4;
free variables
u;
equations
fo es la función objetivo
r1 es la restricción para el proceso de corte
r2 es la restricción para el proceso de combinados
r3 es la restricción para el proceso de costura
r4 es la restricción para el proceso de empaque
r5 es la restricción de demanda para el producto
BioseguridadL23
r6 es la restricción de demanda para el producto
BioseguridadL24
r7 es la restricción de demanda para el producto
BioseguridadL33
r8 es la restricción de demanda para el producto
BioseguridadL34;

fo.. u =e= (80600*x1+93500*x2+53800*x3+36800*x4) -
(42200*x1+52200*x2+22400*x3+11250*x4) ;
r1.. 0.43*x1+0.3*x2+0.22*x3+0.25*x4 =l= 1500;
r2.. 0.15*x1+0.18*x2+0.28*x3+0.1*x4 =l= 1500;
r3.. 0.25*x1+0.35*x2+0.35*x3+0.22*x4 =l= 1500;
r4.. 0.32*x1+0.4*x2+0.15*x3+0.07*x4 =l= 1500;
r5.. x1 =g= 950;
r6.. x2 =g= 800;
r7.. x3 =g= 700;
r8.. x4 =g= 300;
Model trajes /All/
Solve trajes using LP maximizing u;
Display x1.l, x2.l, x3.l, x4.l, u.l;
  
```

Ejercicio de aplicación 1.4

Opere el modelo anterior con los datos de la tabla 1.4 y explique qué ocurre con la solución.

Tabla 1.4. Información sobre los procesos para cada uno de los productos, capacidad y demanda

Proceso		Biosegu- ridad L23	Biosegu- ridad L24	Biosegu- ridad L33	Biosegu- ridad L34	Capacidad (horas)
Corte	Horas por unidad	0,43	0,3	0,22	0,25	2000
Combinados		0,15	0,18	0,28	0,1	2000
Costura		0,25	0,35	0,35	0,22	2000
Empaque		0,32	0,4	0,15	0,07	2000
Precio de venta unitario		COP 80 600	COP 93 500	COP 53 800	COP 36 800	
Penalización por unidad no entregada		COP 42 200	COP 52 200	COP 22 400	COP 11 250	
Demanda		13 000	8000	10 100	6700	

Ejercicio 1.5

Distribución y transporte de mercados a población vulnerable

Terqueo es la empresa encargada de distribuir los mercados donados por el Gobierno distrital a distintas localidades de Bogotá. Los puntos A, B, C y D son los mayoristas a los cuales Terqueo compra los productos de la canasta familiar que luego lleva a sus centros de distribución E y F. Posteriormente, desde estos centros de distribución se llevan a las localidades con menores recursos escogidas por el Distrito y representadas por las letras G, H, I y J. Para esta distribución, es necesario tener en cuenta la figura 1.1, que muestra las diferentes rutas de entrega como, por ejemplo, de los mayoristas directamente a las localidades.

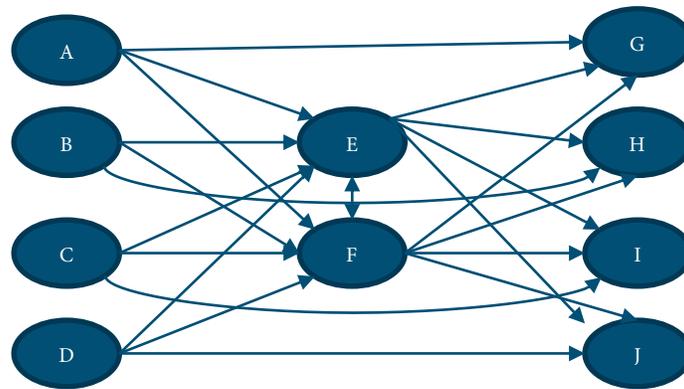


Figura 1.1. Rutas posibles de entrega.

El número de mercados que los mayoristas A, B, C y D pueden ofrecer a Terqueo son 200 000, 300 000, 400 000 y 150 000, respectivamente. A su vez, las localidades G, H, I y J demandan 150 000, 250 000, 300 000 y 350 000 mercados, respectivamente. Los costos asociados de transporte en pesos colombianos se muestran en las tablas 1.5, 1.6 y 1.7.

Tabla 1.5. Costos de transporte desde los mayoristas hasta los centros de distribución

	G	H	I	J
A	11	0	0	0
B	0	15	0	0
C	0	0	21	0
D	0	0	0	7

Tabla 1.6. Costos de transporte desde los centros de distribución hasta las localidades

	G	H	I	J
E	3	1	5	8
F	7	3	2	11

Tabla 1.7. Costos de transporte desde los mayoristas hasta las localidades

	E	F
A	3	4
B	1	2
C	8	7
D	9	4

Se requiere determinar la forma más económica para realizar la entrega de los mercados a las localidades. Es necesario tener en cuenta que el costo de envío entre los centros de distribución E y F es de COP 4.

Solución ejercicio 1.5

Este es un típico problema de transbordo aplicado a una posible coyuntura que enfrentan los entes gubernamentales para la entrega de ayudas alimentarias. En la solución de este ejercicio se realizó un modelo matemático de programación lineal explícito.

Conjuntos

i son los mayoristas $\{A, B, C, D\}$

j son los centros de distribución de Terqueo $\{E, F\}$

k son las localidades que el Distrito quiere atender $\{G, H, I, J\}$

Variables de decisión

x_{ij} es el número de miles de mercados que se envían desde el mayorista i hasta el centro de distribución j

y_{jk} es el número de miles de mercados que se envían desde los centros de distribución j hasta la localidades k

w_{ik} es el número de miles de mercados que se envían desde el mayorista i hasta la localidad k

$z_{jj'}$ es el número de miles de mercados que se envían desde el centro de distribución j hasta el centro de distribución j'

Modelo matemático

En este modelo se plantea una función objetivo que minimice el costo de envío. Por tanto, se debe relacionar cada una de las variables en función de la dirección del enlace en la red de distribución así:

F. O.:

$$\begin{aligned}
 \text{Min}(C) = & 3x_{AE} + 4x_{AF} + x_{BE} + 2x_{BF} + 8x_{CE} \\
 & + 7x_{CF} + 9x_{DE} + 4x_{DF} + 11w_{AG} \\
 & + 15w_{BH} + 21w_{CI} + 7w_{DJ} \\
 & + 4z_{EF} + 4z_{FE} + 3y_{EG} + y_{EH} \\
 & + 5y_{EI} + 8y_{EJ} + 7y_{FG} + 3y_{FH} \\
 & + 2y_{FI} + 11y_{FJ}
 \end{aligned}$$

Restricciones:

Ahora se debe asegurar que los mayoristas no excedan su capacidad. Para ello, se deben ingresar las siguientes restricciones:

$$x_{AE} + x_{AF} + w_{AG} \leq 200$$

$$x_{BE} + x_{BF} + w_{BH} \leq 300$$

$$x_{CE} + x_{CF} + w_{CI} \leq 400$$

$$x_{DE} + x_{DF} + w_{DJ} \leq 150$$

Asimismo, se debe garantizar que se cumpla con la demanda y , para lograrlo, son necesarias las siguientes restricciones:

$$w_{AG} + y_{EG} + y_{FG} \geq 150$$

$$w_{BH} + y_{EH} + y_{FH} \geq 250$$

$$w_{CI} + y_{EI} + y_{FI} \geq 300$$

$$w_{DJ} + y_{EJ} + y_{FJ} \geq 350$$

Finalmente, se debe asegurar que todas las unidades que pasen por los centros de distribución se envíen y ninguna quede alojada en estos. A esto se le llama *restricción de balance* (“todo lo que entra tiene que salir”):

$$\begin{aligned} x_{AE} + x_{BE} + x_{CE} + x_{DE} + z_{FE} \\ = z_{EF} + y_{EG} + y_{EH} + y_{EI} + y_{EJ} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_{AF} + x_{BF} + x_{CF} + x_{DF} + z_{EF} \\ = z_{FE} + y_{FG} + y_{FH} + y_{FI} + y_{FJ} \end{aligned}$$

Restricciones de no negatividad:

$$x_{ij} \geq 0$$

$$y_{jk} \geq 0$$

$$w_{ik} \geq 0$$

$$z_{jj'} \geq 0$$

Luego de solucionar este modelo matemático en GAMS (código 1.5), se ha encontrado que el costo mínimo que debe asumir el Gobierno distrital es de COP 7750 y el plan de envío es el que muestra la tabla 1.8.

Tabla 1.8. Plan de envío óptimo

Desde	Hasta	N.º unidades
Mayorista A	Centro de distribución E	200
Mayorista B	Centro de distribución E	300
Mayorista C	Centro de distribución E	100
Mayorista C	Centro de distribución F	300
Mayorista D	Localidad J	150
Centro de distribución E	Localidad G	150
Centro de distribución E	Localidad H	250
Centro de distribución E	Localidad J	200
Centro de distribución F	Localidad I	300

Código 1.5:

variables

Xae, Xaf, Xbe, Xbf, Xce, Xcf, Xde, Xdf, Wag, Wbh, Wci, Wdj, Zef, Zfe, Yeg, Yeh, Yei, Yej, Yfg, Yfh, Yfi, Yfj, costo;

positive variables

Xae, Xaf, Xbe, Xbf, Xce, Xcf, Xde, Xdf, Wag, Wbh, Wci, Wdj, Zef, Zfe, Yeg, Yeh, Yei, Yej, Yfg, Yfh, Yfi, Yfj;

free variables

costo;

equations

fo es la función objetivo

r1 es la restricción para el mayorista A

r2 es la restricción para el mayorista B

r3 es la restricción para el mayorista C

r4 es la restricción para el mayorista D

r5 es la restricción para la localidad G

r6 es la restricción para la localidad H

r7 es la restricción para la localidad I

r8 es la restricción para la localidad J

r9 es la restricción para el centro de distribución E

r10 es la restricción para el centro de distribución F;

fo.. costo =e=

3*Xae+4*Xaf+Xbe+2*Xbf+8*Xce+7*Xcf+9*Xde+4*Xdf+11*Wag+15*Wbh
 +21*Wci+7*Wdj+4*Zef+4*Zfe+3*Yeg+Yeh+5*Yei+8*Yej+7*Yfg+3*Yfh
 +2*Yfi+11*Yfj;

r1.. Xae+Xaf+Wag =l= 200;

r2.. Xbe+Xbf+Wbh =l= 300;

r3.. Xce+Xcf+Wci =l= 400;

r4.. Xde+Xdf+Wdj =l= 150;

r5.. Wag+Yeg+Yfg =g= 150;

r6.. Wbh+Yeh+Yfh =g= 250;

r7.. Wci+Yei+Yfi =g= 300;

```
r8.. Wdj+Yej+Yfj =g= 350;  
r9.. Xae+Xbe+Xce+Xde+Zfe =e= Zef+Yeg+Yeh+Yei+Yej;  
r10.. Xaf+Xbf+Xcf+Xdf+Zef =e= Zfe+Yfg+Yfh+Yfi+Yfj;  
Model distrito /all/  
Solve distrito using LP minimizing costo;
```

Ejercicio de aplicación 1.5

Formule el modelo matemático de forma indexada.

Ejercicio 1.6

Transporte de pruebas rápidas para diagnosticar COVID-19

Una compañía extranjera pagada por una organización no gubernamental (ONG) debe transportar las pruebas rápidas para diagnosticar COVID-19 en Leticia, que es la ciudad con más casos de contagio en Colombia. Dicha empresa ha solicitado al equipo técnico del presidente información sobre una ruta que le permita un gasto mínimo de combustible para el vehículo que se encargará de transportarlas. Los técnicos han estudiado las posibles rutas para viajar desde Bogotá hasta Leticia y han definido el mapa presentado en la figura 1.2.

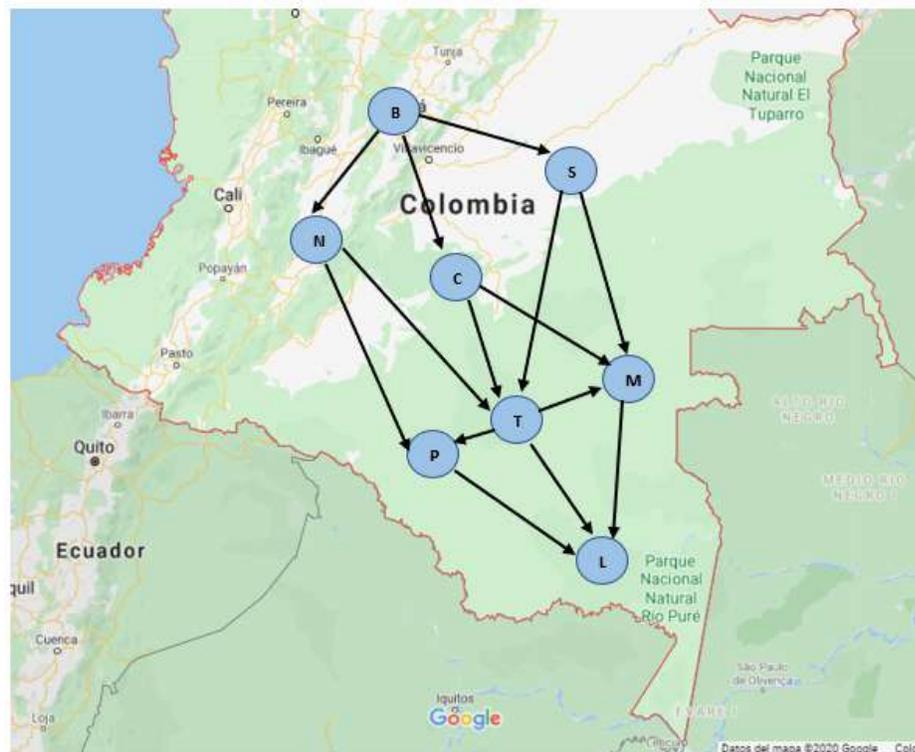


Figura 1.2. Mapa de las posibles rutas para viajar desde Bogotá hasta Leticia.

Teniendo en cuenta lo anterior, la tabla 1.9 presenta el gasto de combustible por cada una de las rutas posibles.

Tabla 1.9. Costos asociados al desplazamiento de una ciudad a otra

Origen	Destino	Gasto de combustible en galones de gasolina
Bogotá (B)	San José del Guaviare (S)	400
	Caquetá (C)	950
	Neiva (N)	800
San José del Guaviare (S)	Mitú (M)	1800
	Tres Islas (T)	900
Caquetá (C)	Mitú (M)	1100
	Tres Islas (T)	600
Neiva (N)	Tres Islas (T)	600
	Putumayo (P)	1200
Mitú (M)	Leticia (L)	400
	Mitú (M)	900
Tres Islas (T)	Putumayo (P)	1000
	Leticia (L)	1300
Putumayo (P)	Leticia (L)	600
Mitú (M)	Leticia (L)	400

Sin embargo, en Colombia los grupos armados ilegales interceptan las carreteras para pedir combustible a los viajeros. Según información del Ejército Nacional, el paso entre Caquetá y Mitú es uno de los más riesgosos, ya que allí estos grupos pueden pedir hasta 70 galones de gasolina. También se sabe que en el paso entre San José del Guaviare y Tres Islas los traficantes de cocaína obligan a los viajeros a transportar cocaína entre veredas vecinas, en lo que se alcanzan a gastar hasta 35 galones de gasolina adicionales.

Identifique la ruta que permita el menor gasto de galones de gasolina teniendo en cuenta la información que se proporciona y mencione cuántos galones de gasolina se consumen en esta ruta.

Solución ejercicio 1.6

Conjuntos

i nodos

alias(i, j)

Variables de decisión

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si cubre el arco } i, j \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Parámetros

$$b_i = \begin{cases} 1 & \text{cuando el nodo es de entrada} \\ 0 & \text{cuando el nodo es de paso} \\ -1 & \text{cuando el nodo es de salida} \end{cases}$$

G_{ij} es el número de galones de gasolina para ir desde un punto *i* a un punto *j*

Modelo matemático

El objetivo es minimizar el número de galones usados, lo que asemeja un problema típico de ruta más corta. Para solucionarlo, se construyó la matriz G_{ij} a partir de la tabla 1.9 y con base en las condiciones de riesgo en el paso entre Caquetá y Mitú y el paso entre San José del Guaviare y Tres Islas. Esto implica agregar 70 galones en la ruta Caquetá–Mitú, para un total de 1170, y 35 galones en la ruta San José del Guaviare–Tres Islas, para un total de 935.

F. O.:

$$\text{Min}(G) = \sum_i \sum_j x_{ij} G_{ij}$$

Restricciones:

Dado que este ejercicio se está formulando a partir de una lógica de red, la restricción es de balance con un parámetro b_i , que se construye a partir de una estructura de entradas menos salidas.

$$\sum_j x_{ji} - \sum_j x_{ij} = b_i ; \forall i$$

Restricción de no negatividad:

$$x_{ij} \in \{0,1\}$$

Después de operar el modelo de GAMS (código 1.6), se encuentra que el número mínimo de galones de gasolina es 2520 y la ruta que se debe seguir es Bogotá–Caquetá–Mitú–Leticia¹.

Código 1.6:

```

sets
i ciudades /"Bogotá", "San José del Guaviare", "Caquetá", "Neiva", "Mitú", "Tres
Islas", "Putumayo", "Leticia"/
alias (i,j)
;
parameters
b(i) agregado i
/
"Bogotá"           -1
"San José del Guaviare"  0
"Caquetá"          0
"Neiva"            0
"Mitú"             0
"Tres Islas"       0
"Putumayo"         0
"Leticia"          1
/

```

¹ Se recomienda ver cómo se soluciona este mismo ejercicio con el uso de algoritmos propios de la logística.

table

c(i,j) gasto de combustible desde el nodo i al nodo j

	"Bogotá"	"San José del Guaviare"	"Caquetá"	"Neiva"	"Mitú"	"Tres Islas"	"Putumayo"	"Leticia"
"Bogotá"	9999	400	950	800	9999	9999	9999	9999
"San José del Guaviare"	9999	9999	9999	9999	1800	935	9999	9999
"Caquetá"	9999	9999	9999	9999	1170	600	9999	9999
"Neiva"	9999	9999	9999	9999	9999	600	1200	9999
"Mitú"	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	400
"Tres islas"	9999	9999	9999	9999	900	9999	1000	1300
"Putumayo"	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	600
"Leticia"	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999

;

variables

x(i,j)

gasos;

binary variables

x(i,j);

free variables

gasos;

equations

fo es la función objetivo

r1(i) es la restricción de balance

;

fo.. gaso =e= sum((i,j),x(i,j)*c(i,j));

r1(i).. sum((j),x(j,i)) - sum((j),x(i,j)) =e= b(i);

model gasolina /all/

solve gasolina using MIP minimizing gaso;

display x.l, gaso.l;

Ejercicio de aplicación 1.6

¿Cómo cambiaría el modelo matemático y la ruta si la carretera entre Caquetá y Mitú estuviera deshabilitada?

Ejercicio 1.7

Producción y distribución de la vacuna contra la COVID-19

El Laboratorio Científico Colombia es Pasión S. A. ha logrado patentar la vacuna contra la COVID-19 y desea iniciar la producción para distribuirla por todo el país. La vacuna se producirá en Bogotá y Cali y luego se llevará a centros de distribución ubicados en Barranquilla, Medellín, Tunja y Popayán.

Según los científicos, una persona con estatura entre 1,50 m y 1,65 m debe recibir una dosis de 5 mL, que se llama *Anti-COVID Tipo 1*, mientras que una persona entre 1,66 m y 1,95 m debe recibir una dosis de 8 mL, denominada *Anti-COVID Tipo 2*.

Una dosis Anti-COVID Tipo 1 debe contener como máximo 35 % del coronavirus SARS-CoV-2 debilitado —si se le pone más, la persona puede desarrollar la enfermedad—, máximo 15 % de conservantes y 10 % de coadyuvantes. El resto debe ser proteína de huevo. Por su parte, una dosis de Anti-COVID Tipo 2 debe tener máximo 40 % del virus debilitado —si se añade más, la persona puede desarrollar la enfermedad—, 15 % de conservantes, 10 % de coadyuvantes y el 35 % restante debe ser proteína de huevo. La tabla 1.10 muestra los costos por mililitro de los componentes y su disponibilidad en el país.

Tabla 1.10. Costos por mililitro y disponibilidad de los componentes

Componente	Costo por mililitro (COP)	Disponibilidad en Colombia en mL
SARS-CoV-2	0	Infinito
Conservantes	350	10 000 000
Coadyuvantes	800	8 000 000
Proteína de huevo	550	12 000 000

Ahora bien, producir una dosis de Anti-COVID Tipo 1 cuesta COP 2300, sin incluir los costos por compra de material, y fabricar una dosis de Anti-COVID Tipo 2 cuesta COP 2600, fuera de los gastos por compra de material. Estos costos aplican para las dos plantas.

Asimismo, según la solicitud del Gobierno nacional, es necesario producir los dos tipos de vacunas durante el periodo septiembre-diciembre. Por ello, han permitido que se guarde inventario cada mes, con un costo de almacenamiento de COP 750 para una dosis de Anti-COVID Tipo 1 y de COP 1000 para una dosis de Anti-COVID Tipo 2, en las dos plantas. Además, el presidente de la República ha pedido que en diciembre se guarde un inventario de 5000 dosis de la Anti-COVID Tipo 1 y 2300 dosis de la Anti-COVID Tipo 2 en Bogotá. En Cali se deben dejar 3200 dosis de Anti-COVID-Tipo 1 y 1300 dosis de Anti-COVID Tipo 2. Por otro lado, la vacuna solo se le aplicará a personas mayores de 60 años. La tabla 1.11 muestra el número de personas en cada ciudad destino de acuerdo con su estatura.

Tabla 1.11. Número de personas en cada ciudad destino según su estatura

Ciudad	Número de personas mayores de 60 años con estatura entre 1,50-1,65 m	Número de personas mayores de 60 años con estatura entre 1,66-1,95 m
Barranquilla	120 000	6500
Medellín	145 000	12 300
Tunja	80 000	2600
Popayán	35 000	800

La demanda se atenderá en el periodo de tiempo indicado de la siguiente forma:

- En septiembre el 35 % de las personas en todas las ciudades
- En octubre el 25 % de las personas en todas las ciudades
- En noviembre el 20 % de las personas en todas las ciudades
- En diciembre el 20 % de las personas en todas las ciudades

Finalmente, la tabla 1.12 presenta los costos de transporte de un mililitro de cualquiera de los dos tipos de vacuna, desde las ciudades de origen hasta las ciudades destino y en cualquier mes.

Tabla 1.12. Costos de un mililitro de ambos tipos de vacuna desde la ciudad de origen hasta las ciudades destino

Ciudades	Barranquilla	Medellín	Tunja	Popayán
Bogotá	COP 0,0045	COP 0,00015	COP 0,0008	COP 0,015
Cali	COP 0,065	COP 0,0035	COP 0,0038	COP 0,00034

A partir de los anteriores datos, se ha solicitado al Laboratorio Científico Colombia es Pasión planear la producción y el transporte de la vacuna contra la COVID-19 al costo mínimo.

Solución ejercicio 1.7

Conjuntos

i es el componente de la vacuna

$\{SARS - CoV - 2, conservantes, coadyudantes, proteína de huevo\}$

j es el tipo de vacuna $\{Anti - COVID Tipo 1, Anti - COVID Tipo 2\}$

k son las plantas de producción $\{Bogotá, Cali\}$

l son los centros de distribución $\left\{ \begin{array}{l} Barranquilla, Medellín, \\ Tunja, Popayán \end{array} \right\}$

t es el mes $\{septiembre, octubre, noviembre, diciembre\}$

Variables de decisión

x_{jkt} es el número de mililitros a producir de la vacuna tipo j en la planta k en el mes t

y_{ijkt} es el número de mililitros a comprar del material i para producir la vacuna j en la planta k en el mes t

Inv_{jkt} es el número de mililitros a almacenar de la vacuna tipo

j en planta k en el mes t

z_{jkt} es el número de mililitros a transportar de la vacuna tipo j desde la planta k hasta la ciudad l en el mes t

Parámetros

$Cmat_i$ es el costo de un mililitro del material i

$Calm_j$ es el costo de almacenar un mililitro de la vacuna j

$Cpro_j$ es el costo de producir un mililitro de la vacuna j

$Disp_i$ es el número de mililitros disponibles del material i

Dem_{jlt} es el número de mililitros demandados de la vacuna j en la ciudad l en el mes t

Ctr_{kl} es el costo de transportar 1 mililitro desde la planta k hasta la ciudad l

Modelo matemático

El objetivo del ejercicio es minimizar el costo de producir y transportar las vacunas.

F. O.:

$$\begin{aligned}
 \text{Min}(C) = & \sum_{j \in J} \sum_{k \in K} \sum_{t \in T} x_{jkt} Cpro_j \\
 & + \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \sum_{k \in K} \sum_{t \in T} y_{ijkt} Cmat_i \\
 & + \sum_{j \in J} \sum_{k \in K} \sum_{t \in T} Inv_{jkt} Calm_j \\
 & + \sum_{j \in J} \sum_{k \in K} \sum_{l \in L} \sum_{t \in T} z_{jklt} Ctr_{kl}
 \end{aligned}$$

Restricciones:

Para iniciar, se debe asegurar con una restricción de producción la igualdad entre la variable de las unidades de producción de la vacuna y la de los componentes:

$$x_{kjt} = \sum_{i \in I} y_{ijkt} \quad \forall j, \forall k, y \forall t$$

Posteriormente, se plantean las restricciones para la mezcla de los componentes en la vacuna Anti-COVID Tipo 1:

$$\frac{y_{11kt}}{\sum_i y_{i1kt}} \leq 0.35 \quad \forall k, y \forall t$$

$$\frac{y_{21kt}}{\sum_i y_{i1kt}} \leq 0.15 \quad \forall k, y \forall t$$

$$\frac{y_{31kt}}{\sum_i y_{i1kt}} \leq 0.10 \quad \forall k, y \forall t$$

$$\frac{y_{41kt}}{\sum_i y_{i1kt}} \leq 0.40 \quad \forall k, y \forall t$$

Luego, se establecen las restricciones para la mezcla de los componentes en la vacuna Anti-COVID Tipo 2:

$$\frac{y_{12kt}}{\sum_i y_{i2kt}} \leq 0.4 \quad \forall k, y \forall t$$

$$\frac{y_{22kt}}{\sum_i y_{i2kt}} \leq 0.15 \quad \forall k, y \forall t$$

$$\frac{y_{32kt}}{\sum_i y_{i2kt}} \leq 0.10 \quad \forall k, y \forall t$$

$$\frac{y_{42kt}}{\sum_i y_{i2kt}} \leq 0.35 \quad \forall k, y \forall t$$

Por otro lado, se debe asegurar la restricción de disponibilidad de material de los componentes:

$$\sum_{j \in J} \sum_{k \in K} \sum_{t \in T} y_{ijkt} \leq Disp_i \quad \forall i$$

Y se debe garantizar la restricción del inventario:

$$\begin{aligned}
 x_{jkt} + Inv_{jk(t-1)} + Inv_{jkt} \\
 = \sum_{l \in L} Dem_{jlt} \quad \forall j, \forall k, y \forall t
 \end{aligned}$$

Finalmente, se indica la restricción de disponibilidad del envío:

$$\sum_{l \in L} z_{jkl} \leq x_{jkt} \quad \forall j, \forall k, y \forall t$$

Y la restricción del cumplimiento de la demanda:

$$\sum_{k \in K} z_{jkl} \geq Dem_{jlt} \quad \forall j, \forall l, y \forall t$$

No se deben olvidar las restricciones de finalización de inventario (mes de diciembre), que se escriben de la siguiente manera:

$$Inv_{114} = 25\ 000$$

$$Inv_{214} = 18\ 400$$

$$Inv_{124} = 16\ 000$$

$$Inv_{224} = 10\ 400$$

Restricciones de no negatividad:

$$x_{jkt} \geq 0$$

$$y_{ijkt} \geq 0$$

$$Inv_{jkt} \geq 0$$

$$z_{jkl} \geq 0$$

Una vez se soluciona el modelo en GAMS² (código 1.7), se encuentra el plan de producción, inventario y distribución que se muestra en las tablas 1.13 a 1.18.

Tabla 1.13. Número de mililitros a producir en cada ciudad y mes

Tipo de vacuna	Ciudad	Septiembre	Octubre	Noviembre	Diciembre
Anti-COVID Tipo 1	Bogotá	621 250	331 250	378 750	345 000
	Cali	333 750	43 750	59 750	35 000
Tipo de vacuna	Ciudad	Septiembre	Octubre	Noviembre	Diciembre
Anti-COVID Tipo 2	Bogotá	60 560	31 100	35 840	17 120
	Cali	56 020	1600	4160	18 400

Tabla 1.14. Número de mililitros a adquirir de SARS-CoV-2 para cada tipo de vacuna

Tipo de vacuna	Planta	Septiembre	Octubre	Noviembre	Diciembre
Anti-COVID Tipo 1	Bogotá	217 437,5	115 937,5	132 562,5	120 750
	Cali	116 812,5	15 312,5	20912,5	12 250
Anti-COVID Tipo 2	Bogotá	24 224	12 440	14 336	6848
	Cali	22408	640	1664	7360
Tipo de vacuna	Planta	Septiembre	Octubre	Noviembre	Diciembre
Anti-COVID Tipo 1	Bogotá	93 187,5	49 687,5	56 812,5	51 750
	Cali	50 062,5	6562,5	8962,5	5250
Anti-COVID Tipo 2	Bogotá	9084	4665	5376	2568
	Cali	8403	240	624	2760

² Se sugiere revisar los parámetros del código, dado que algunos deben transformarse para que las unidades de medición de estos sean congruentes con la formulación.

Tabla 1.15. Número de mililitros a adquirir de coadyuvantes para cada tipo de vacuna

Tipo de vacuna	Planta	Septiembre	Octubre	Noviembre	Diciembre
Anti-COVID Tipo 1	Bogotá	62 125	33 125	37 875	34 500
	Cali	33 375	4375	5975	3500
Anti-COVID Tipo 2	Bogotá	6056	3110	3584	1712
	Cali	5602	160	416	1840

Tabla 1.16. Número de mililitros a adquirir de proteína de huevo para cada tipo de vacuna

Tipo de vacuna	Planta	Septiembre	Octubre	Noviembre	Diciembre
Anti-COVID Tipo 1	Bogotá	248 500	132 500	151 500	138 000
	Cali	133 500	17 500	23 900	14 000
Anti-COVID Tipo 2	Bogotá	21 196	10 885	12 544	5992
	Cali	19 607	560	1456	6440

Tabla 1.17. Número de mililitros a almacenar en cada ciudad y mes

Tipo de vacuna	Ciudad	Septiembre	Octubre	Noviembre	Diciembre
Anti-COVID Tipo 1	Bogotá	248 500	132 500	151 500	138 000
	Cali	113 500	17 500	23 900	14 000
Anti-COVID Tipo 2	Bogotá	43 750	0	10 000	25 000
	Cali	331 250	0	329 000	16 000

Tabla 1.18. Número de mililitros a transportar desde las ciudades origen hasta las ciudades destino

Tipo de vacuna	Desde	Hasta	Septiembre	Octubre	Noviembre	Diciembre
Anti-COVID Tipo 1	Bogotá	Barranquilla	210 000	50 000	43 750	120 000
		Medellín	253 750	181 250	120 000	145 000
		Tunja	140 000	100 000	145 000	80 000
		Popayán	0	0	20 250	0
	Cali	Popayán	61 250	43 750	59 750	35 000
Anti-COVID Tipo 2	Bogotá	Barranquilla	18 200	1300	1600	10 400
		Medellín	34 440	24 600	10 400	6720
		Tunja	7280	5200	19 680	0
	Cali	Medellín	0	0	0	12 960
		Tunja	0	0	0	4160
		Popayán	2240	1600	4160	1280

Código 1.7:

Sets

i es el material de la vacuna /"COVID-19", "Conservantes", "Coadyuvantes", "Proteina de huevo"/

j es el tipo de vacuna /"AntiCovid-Tipo1", "AntiCovid-Tipo2"/

k es la planta de producción /"Bogotá", "Cali"/

l es los centros de distribución

/ "Barranquilla", "Medellin", "Tunja", "Popayan"/

t es mes /"Septiembre", "Octubre", "Noviembre", "Diciembre"/

;

Parameters

Cmat(i) costo de un mililitro del material **i**

/

"COVID-19" 0

"Conservantes" 350

"Coadyuvantes" 800

"Proteina de huevo" 550

/

Calm(j) costo de almacenar un mililitro de la vacuna **j**

/

"AntiCovid-Tipo1" 150

"AntiCovid-Tipo2" 120

/

Cpro(j) costo de producir un mililitro de la vacuna **j**

/

"AntiCovid-Tipo1" 460

```

"AntiCovid-Tipo2"      325
/
Disp(i) número de mililitros disponibles del material i

/
"COVID-19"             1000000000000000000
"Conservantes"        10000000
"Coadyuvantes"        8000000
"Proteina de huevo"   12000000
/
  
```

Table

Dem(j,l,t) número de mililitros demandados de la vacuna j en la ciudad l en el mes t

	"Septiembre"	"Octubre"	"Noviembre"	"Diciembre"
"AntiCovid-Tipo1"."Barranquilla"	210000	50000	43750	120000
"AntiCovid-Tipo1"."Medellin"	253750	181250	120000	145000
"AntiCovid-Tipo1"."Tunja"	140000	100000	145000	80000
"AntiCovid-Tipo1"."Popayan"	61250	43750	80000	35000
"AntiCovid-Tipo2"."Barranquilla"	18200	1300	1600	10400
"AntiCovid-Tipo2"."Medellin"	34440	24600	10400	19680
"AntiCovid-Tipo2"."Tunja"	7280	5200	19680	4160
"AntiCovid-Tipo2"."Popayan"	2240	1600	4160	1280

;

Table

Ctr(k,l) costo de transportar l mililitro desde la planta k hasta la ciudad l

	"Barranquilla"	"Medellin"	"Tunja"	"Popayan"
"Bogotá"	0.0045	0.00015	0.0008	0.0015
"Cali"	0.065	0.0035	0.0038	0.00034

;

variables

x(j,k,t) es el número de mililitros a producir de la vacuna tipo j en la planta k en el mes t

y(i,j,k,t) es el número de mililitros a comprar del material i para producir la vacuna tipo j en la planta k en el mes t

Inv(j,k,t) es el número de mililitros a almacenar de la vacuna tipo j en la planta k en el mes t

z(j,k,l,t) es el número de mililitros a transportar de la vacuna tipo j desde la ciudad k hasta la ciudad l en mes t

costo es el costo del plan de vacunación

;

positive variables

x(j,k,t) es el número de mililitros a producir de la vacuna

```

    tipo j en la planta k en el mes t
y(i,j,k,t) es el número de mililitros a comprar del
material i para producir la vacuna tipo j en la
planta k en el mes t
Inv(j,k,t) es el número de mililitros a almacenar de la
vacuna tipo j en la planta k en el mes t
z(j,k,l,t) es el número de mililitros a transportar de la
vacuna tipo j desde la ciudad k hasta la ciudad
l en mes t

;
free variables
costo
;
equations
fo es la función objetivo
R1(j,k,t) es la restricción de producción
R2(k,t) es la restricción de la mezcla del COVID-19 para
AntiCovid-Tipo1
R3(k,t) es la restricción de la mezcla de los conservantes
para AntiCovid-Tipo 1
R4(k,t) es la restricción de los coadyuvantes para
AntiCovid-Tipo1
R5(k,t) es la restricción de la mezcla de la proteína de
huevo AntiCovid-Tipo1
R6(k,t) es la restricción de la mezcla del COVID-19 para
AntiCovid-Tipo2
R7(k,t) es la restricción de la mezcla de los conservantes
para AntiCovid-Tipo2
R8(k,t) es la restricción de la mezcla de los coadyuvantes
para AntiCovid-Tipo2
R9(k,t) es la restricción de la mezcla de la proteína de
huevo AntiCovid-Tipo2
R10(i) es la restricción de la disponibilidad de material
R11(j,k,t) es la restricción del inventario
R12(j,k,t) es la restricción de la disponibilidad de envío
R13(j,l,t) es la restricción de la demanda
R14
es la restricción de finalización de inventario
en diciembre
R15
es la restricción de finalización de inventario
en diciembre
R16
es la restricción de finalización de inventario
en diciembre
R17
es la restricción de finalización de inventario
en diciembre

;
fo.. costo =e=
sum((j,k,t),x(j,k,t)*Cpro(j))+sum((i,j,k,t),y(i,j,k,t)*Cmat(i))+sum((j,k,t)
),Inv(j,k,t)*Calm(j))+sum((k,j,l,t),z(j,k,l,t)*Ctr(k,l));
  
```

```

R1(j,k,t).. x(j,k,t) =e sum(i),y(i,j,k,t));
R2(k,t).. y('COVID-19','AntiCovid-Tipo1',k,t) =l=
0
.35*sum(i),y(i,'AntiCovid-Tipo1',k,t));
R3(k,t).. y('Conservantes','AntiCovid-Tipo1',k,t) =l=
0
.15*sum(i),y(i,'AntiCovid-Tipo1',k,t));
R4(k,t).. y('Coadyuvantes','AntiCovid-Tipo1',k,t) =l=
0
.10*sum(i),y(i,'AntiCovid-Tipo1',k,t));
R5(k,t).. y('Proteina de huevo','AntiCovid-Tipo1',k,t) =l=
0
.4*sum(i),y(i,'AntiCovid-Tipo1',k,t));
R6(k,t).. y('COVID-19','AntiCovid-Tipo2',k,t) =l=
0
.4*sum(i),y(i,'AntiCovid-Tipo2',k,t));
R7(k,t).. y('Conservantes','AntiCovid-Tipo2',k,t) =l=
0
.15*sum(i),y(i,'AntiCovid-Tipo2',k,t));
R8(k,t).. y('Coadyuvantes','AntiCovid-Tipo2',k,t) =l=
0
.10*sum(i),y(i,'AntiCovid-Tipo2',k,t));
R9(k,t).. y('Proteina de huevo','AntiCovid-Tipo2',k,t) =l=
0
.35*sum(i),y(i,'AntiCovid-Tipo2',k,t));
R10(i).. sum(j,k,t),y(i,j,k,t) =l= Disp(i);
R11(j,k,t).. x(j,k,t)+Inv(j,k,t-1)+Inv(j,k,t) =e sum(l),Dem(j,l,t));
R12(j,k,t).. sum(l),z(j,k,l,t) =l= x(j,k,t);
R13(j,l,t).. sum(k),z(j,k,l,t) =g= Dem(j,l,t);
R14.. Inv('AntiCovid-Tipo1','Bogotá','Diciembre') =e= 25000;
R15.. Inv('AntiCovid-Tipo2','Bogotá','Diciembre') =e= 18400;
R16.. Inv('AntiCovid-Tipo1','Cali','Diciembre') =e= 16000;
R17.. Inv('AntiCovid-Tipo2','Cali','Diciembre') =e= 10400;
Model vacuna /all/
Solve vacuna using LP minimizing costo;

```

Ejercicio de aplicación 1.7

Teniendo en cuenta la salida del modelo corrido en GAMS, ¿sería recomendable guardar más inventario de los dos tipos de vacuna en diciembre?

Ejercicio 1.8

Producción y distribución de respiradores

La empresa colombiana IO Respiradores produce y comercializa insumos para la fabricación de respiradores o ventiladores artificiales usados en las unidades de cuidado intensivo (UCI). Los dos tipos de productos $i \in I$ son el oxígeno artificial y el refrigerante. Estos productos se generan en dos plantas $j \in J$ ubicadas en Medellín y Cali.

Para la producción de oxígeno artificial se requiere la mezcla de tres materiales $k \in K$: nitrógeno, argón y aire. La disponibilidad de estos materiales en cada planta es $Disp_{jk}$. Cada metro cúbico de oxígeno artificial requiere cuando mucho 50 % de 1 m³ de nitrógeno y hasta 10 % de 1 m³ de argón. En cuanto al refrigerante, se requiere para cada m³ al menos 30 % de aire y a lo sumo 25 % de argón. Se sabe, además, que el costo del material es C_k . La empresa puede invertir en la compra del material por cada planta máximo Din_j .

Ahora bien, para la producción de 1 m³ de cada producto se requieren Op_i número de operarios. Cada planta tiene a su disposición $Disp_j$ operarios. El salario de cada uno de los operarios es Sal_i por cada metro cúbico de producto.

Una vez se termina la producción, se envían todas las unidades producidas a los centros de distribución $l \in L$ ubicados en Tunja y Bucaramanga. El costo de transporte por cada metro cúbico de producto a cada centro de distribución es C_{il} . Todas las unidades producidas en las plantas se deben enviar a los centros de distribución.

Desde el punto de distribución de Tunja se puede abastecer a clientes en Bogotá y Manizales, mientras que desde Bucaramanga se pueden atender clientes en Cúcuta y Arauca. Las ciudades $m \in M$ son las ciudades clientes. Los costos de transporte por cada metro cúbico de producto desde cada centro de distribución a cada ciudad cliente es C_{im} . Adicionalmente, la demanda de las ciudades por cada producto es Dem_{im} . La empresa quisiera

hacer un plan de producción y distribución de los productos de IO Respiradores con el fin de minimizar sus costos.

Solución ejercicio 1.8

Conjuntos

i son los productos {oxígeno artificial, refrigerante}

j son las plantas de producción {Medellín, Cali}

k son los materiales {nitrógeno, argón, aire}

l son los centros de distribución {Tunja, Bucaramanga}

m son las ciudades clientes {Bogotá, Manizales, Cúcuta, Arauca}

Variables de decisión

x_{ij} es el número de unidades que se deben producir del producto i en la planta j

y_{ijk} es el número de unidades a comprar del material k para producir el producto i en la planta j

z_{ijl} es el número de unidades que se envían del producto i desde la planta j hasta el centro de distribución l

w_{ilm} es el número de unidades del producto i que se debe enviar desde cada centro de distribución l hasta la ciudad m

Parámetros

C_k es el costo de 1kg del material k

Op_i es el número de operarios necesarios para producir el producto i

Sal_i es el salario que ganan los operarios por cada kg producido del producto i

C_{ijl} es el costo de enviar 1 kg del producto i desde la planta j hasta el centro de distribución l

C_{ilm} es el costo de enviar 1 kg del producto i desde el centro de distribución l hasta la ciudad m

$Disp_{jk}$ es el número de unidades disponibles en la planta j del material k

Din_j es la cantidad de dinero para invertir en materiales en la planta j

$Dispop_j$ es la cantidad de operarios disponibles en la planta j

Dem_{im} es el número de unidades del producto i demandados en la ciudad m

Modelo matemático

La función objetivo que minimiza los costos de planificación de la producción y la distribución de los productos se escribe de forma indexada así:

F. O.:

$$\begin{aligned}
 \text{Min}(C) = & \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \sum_{k \in K} y_{ijk} C_k + \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} x_{ij} Op_i \\
 & + \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \sum_{l \in L} z_{ijl} C_{ijl} \\
 & + \sum_{i \in I} \sum_{M=1}^2 w_{i1m} C_{i1m} \\
 & + \sum_{i \in I} \sum_{M=3}^4 w_{i2m} C_{i2m}
 \end{aligned}$$

Restricciones:

La restricción que permite asignar los materiales a cada uno de los productos es:

$$x_{ij} = \sum_{k \in K} y_{ijk} \quad \forall i \text{ y } \forall j$$

La restricción que establece el uso máximo de nitrógeno, argón y aire de acuerdo con la disponibilidad en cada planta es:

$$\sum_{i \in I} y_{ijk} \leq Disp_{jk} \quad \forall j \text{ y } \forall k$$

Para establecer la condición de que cada metro cúbico de oxígeno artificial requiere máximo 50 % de nitrógeno y hasta 10 % de argón, se deben plantear las siguientes restricciones:

$$\frac{y_{111}}{\sum_{k \in K} y_{11k}} \leq 0,5$$

$$\frac{y_{121}}{\sum_{k \in K} y_{12k}} \leq 0,5$$

$$\frac{y_{112}}{\sum_{k \in K} y_{11k}} \leq 0,1$$

$$\frac{y_{121}}{\sum_{k \in K} y_{12k}} \leq 0,1$$

Considerando la condición de que para cada metro cúbico de refrigerante se requiere al menos 30 % de aire y 25 % de argón, se deben establecer las siguientes restricciones:

$$\frac{y_{213}}{\sum_{k \in K} y_{21k}} \geq 0,3$$

$$\frac{y_{223}}{\sum_{k \in K} y_{22k}} \geq 0,3$$

$$\frac{y_{212}}{\sum_{k \in K} y_{21k}} \leq 0,25$$

$$\frac{y_{222}}{\sum_{k \in K} y_{22k}} \leq 0,25$$

Ahora bien, para la compra de los componentes se ha destinado un tope de dinero que puede usar la empresa. Para asegurarse de no sobrepasarlo, se debe plantear la siguiente restricción:

$$\sum_{i \in I} \sum_{k \in K} y_{ijk} C_k \leq Din_j \quad \forall j$$

Por otro lado, la restricción que permite establecer que se use el número máximo de operarios disponibles en cada planta es:

$$\sum_{i \in I} x_{ij} Op_i \leq Dispop_j \quad \forall j$$

Y la restricción para asegurar que todo lo que se produzca en las plantas sea enviado a los centros de distribución es:

$$\sum_{i \in I} x_{ij} - \sum_{i \in I} z_{ijl} = 0 \quad \forall j \text{ y } \forall l$$

También es necesario asegurar el flujo en los centros de distribución con las siguientes restricciones:

$$\sum_{i \in I} z_{ij1} - \sum_{M=1}^2 w_{i1m} = 0 \quad \forall j$$

$$\sum_{i \in I} z_{ij2} - \sum_{M=3}^4 w_{i2m} = 0 \quad \forall j$$

Finalmente, las restricciones que garantizan que la empresa atienda su demanda en las ciudades clientes son:

$$w_{i1m} \geq Dem_{im} \quad \forall i \text{ y } \forall \frac{m}{\{m \leq 2\}}$$

$$w_{i2m} \geq Dem_{im} \quad \forall i \text{ y } \forall \frac{m}{\{m \geq 3\}}$$

Ejercicio de aplicación 1.8

¿Cómo cambiaría el modelo matemático si los centros de distribución pudieran repartir a todas las ciudades clientes?

Ejercicio 1.9

Mercados entregados por los Centros de Acopio para la Solidaridad

En el marco de las iniciativas para minimizar el impacto de la pandemia por COVID-19 en la alimentación de familias que han visto reducidos (casi a cero) sus ingresos, un grupo de estudiantes de la Universidad Central se ha organizado en c Centros de Acopio para la Solidaridad (CAS), en la ciudad de Bogotá.

Cada CAS acopia p productos de primera necesidad con los que ensambla mercados para distribuirlos a k familias de la comunidad de la Universidad Central identificadas con anterioridad. Desafortunadamente, no es posible suplir con mercados a todas las familias identificadas, por lo cual se ha asignado un valor entre 1 y 5 a cada familia, que representa el nivel de prioridad que cada una tiene de recibir este mercado en el marco de sus necesidades. El valor 1 representa poco prioritario y 5, muy prioritario. Para esto, se cuenta con la siguiente información:

- Sea TP_c la tasa de producción por hora del CAS c ; es decir, el número de mercados que arma el CAS c por hora.
- Sea HT_c el número de horas al día que opera el CAS c .
- Sea DT_c el número de días al mes que opera el CAS c .
- Sea NM_c el número de mercados disponibles este mes en el CAS c para entregar.
- Sea P el presupuesto total del mes con el que cuenta este grupo de estudiantes.
- Sea CAM_c el costo de armar un mercado en el CAS c .
- Sea $CEM_{c,r}$ el costo de enviar un mercado desde el CAS c a una familia con prioridad r .
- Sea NF_r el número de familias con prioridad r identificadas.
- Se debe entregar un mercado a por lo menos el 10 % de las familias clasificadas con nivel de prioridad 3.
- Se debe entregar un mercado a por lo menos el 20 % de las familias clasificadas con nivel de prioridad 4.

- Se debe entregar un mercado a por lo menos el 40 % de las familias clasificadas con nivel de prioridad 5.

Teniendo en cuenta lo anterior, se requiere formular un modelo de programación lineal que sirva a este grupo de estudiantes y a otros en contextos similares para determinar de manera objetiva el número de familias con prioridad r a las que cada centro c enviará un mercado, de tal forma que se maximice la suma del índice de prioridad de las familias beneficiadas por los mercados en el próximo mes.

Solución ejercicio 1.9

Conjuntos

c Cas $\{1, \dots, 6\}$

r Prioridad $\{1, \dots, 5\}$

Variables de decisión

$X_{c,r}$: número de familias r que recibirán mercado del CAS c

Parámetros

TP_c es la tasa de producción por hora del CAS c ; es decir, el número de mercados que arma el CAS c por hora.

HT_c es el número de horas al día que opera el CAS c .

DT_c es el número de días al mes que opera el CAS c .

NM_c es el número de mercados disponibles en el CAS c para entregar este mes.

P es el presupuesto total del mes con el que cuenta este grupo de estudiantes.

CAM_c es el costo de armar un mercado en el CAS c .

$CEM_{c,r}$ es el costo de enviar un mercado desde el CAS c a una familia con prioridad r .

NF_r es el número de familias con prioridad r identificadas.

NP_r es el valor de prioridad dado en categoría r (tabla 1.19).

Tabla 1.19. Valores de la prioridad

r	1	2	3	4	5
NP	1	2	3	4	5

Modelo matemático

F. O.:

$$Z = \text{Max} \sum_c \sum_r (NP_r X_{c,r})$$

Restricciones:

Número de mercados disponibles en cada CAS c :

$$\sum_r (X_{c,r}) \leq NM_c \quad \forall c$$

Tiempo disponible de operación en el mes de cada CAS c :

$$\sum_r \left(\frac{X_{c,r}}{TP_c} \right) \leq HT_c DT_c \quad \forall c$$

Disponibilidad presupuestal al mes:

$$\sum_c \sum_r ((CAM_c + CEM_{c,r}) X_{c,r}) \leq P$$

Número máximo de familias en cada prioridad:

$$\sum_c (X_{c,r}) \leq NF_r \quad \forall r$$

Con las condiciones dadas, se debe entregar un mercado a por lo menos el 10 % de las familias clasificadas con nivel de prioridad 3:

$$\sum_c (X_{c,3}) \geq 0,1 * NF_3$$

Se debe entregar un mercado a por lo menos el 20 % de las familias clasificadas con nivel de prioridad 4:

$$\sum_c (X_{c,4}) \geq 0,2 * NF_4$$

Se debe entregar un mercado a por lo menos el 40 % de las familias clasificadas con nivel de prioridad 5:

$$\sum_c (X_{c,5}) \geq 0,4 * NF_5$$

Restricción de no negatividad:

$$X_{c,r} \geq 0 \quad \forall c \forall r$$

Ejercicio de aplicación 1.9

Con los datos que se muestran en las tablas 1.20 a 1.26, formule y resuelva el problema en GAMS o Solver. Si se debe suspender la operación de uno de los centros, es decir, que solo operen 7, ¿cuál es la nueva solución?

Datos

TP_c es la tasa de producción por hora del CAS c ; es decir, número de mercados que arma el CAS c por hora.

Tabla 1.20. Tasa de producción de cada CAS

CAS	TP
1	8
2	9
3	12
4	10
5	9
6	10
7	8
8	11

HT_c es el número de horas al día que opera el CAS c .

Tabla 1.21. Número de horas al día que opera el CAS

CAS	HT
1	6
2	4
3	4
4	8
5	8
6	6
7	6
8	4

DT_c es el número de días al mes que opera el CAS c .

Tabla 1.22. Número de días al mes que opera el CAS

CAS	DT
1	24
2	20
3	16
4	23
5	22
6	21
7	21
8	18

NM_c es el número de mercados disponibles este mes en el CAS c para entregar.

Tabla 1.23. Número de mercados disponibles al mes en el CAS

CAS	NM
1	920
2	1160
3	970
4	1080
5	1230
6	970
7	1170
8	1380

CAM_c es el costo de armar un mercado en el CAS c .

Tabla 1.24. Costos de armar un mercado en el CAS

CAS	CAM (COP)
1	1800
2	1700
3	1500
4	1300
5	1300
6	1200
7	1200
8	1400

$CEM_{c,r}$ es el costo de enviar un mercado desde el CAS c a una familia con prioridad r .

Tabla 1.25. Costos de enviar un mercado desde el CAS hasta las familias según la prioridad

CAS	Nivel de prioridad				
	1	2	3	4	5
1	COP 3100	COP 3700	COP 4300	COP 7000	COP 6000
2	COP 6600	COP 3600	COP 5800	COP 6500	COP 4400
3	COP 4000	COP 3600	COP 4800	COP 6900	COP 5300
4	COP 4400	COP 6000	COP 5000	COP 4000	COP 5600
5	COP 4500	COP 4300	COP 6000	COP 4000	COP 5900
6	COP 6700	COP 6500	COP 6200	COP 4000	COP 5100
7	COP 5000	COP 6500	COP 5100	COP 5900	COP 3200
8	COP 6800	COP 5500	COP 3900	COP 3400	COP 4700

P es el presupuesto total del mes con el que cuenta este grupo de estudiantes

$$P: \text{COP } 70\,000\,000\,000$$

NF_r es el número de familias con prioridad r identificadas

Tabla 1.26. Número de familias según su prioridad

Prioridad	NF
1	1328
2	2977
3	2696
4	2482
5	2081

Ejercicio 1.10

Ensamble de mercados entregados por los Centros de Acopio para la Solidaridad

Este ejercicio se desarrolla en el mismo contexto del ejercicio 1.9, pero incorpora otros elementos que involucran el manejo de restricciones de equivalencia.

En el marco de las iniciativas para minimizar el impacto de la pandemia por COVID-19 en la alimentación de familias que han visto reducidos (casi a cero) sus ingresos, un grupo de estudiantes de la Universidad Central se ha organizado en c Centros de Acopio para la Solidaridad (CAS), en la ciudad de Bogotá.

Cada CAS acopia p productos de primera necesidad con los que ensambla mercados para distribuirlos a k familias de la comunidad de la Universidad Central identificadas con anterioridad. Desafortunadamente, no es posible suplir con mercados a todas las familias identificadas, por lo cual se ha asignado un valor entre 1 y 5 a cada familia, que representa el nivel de prioridad que cada una tiene de recibir este mercado en el marco de sus necesidades. El valor 1 representa poco prioritario y 5, muy prioritario. Para esto, se cuenta con la siguiente información:

- Sea PM_p el número de kilogramos del producto p que debe llevar incorporado cada mercado.
- Sea $DP_{c,p}$ los kilogramos disponibles en el CAS c del producto p .
- Sea TP_c la tasa de producción por hora del CAS c , es decir, el número de mercados que por hora arma el CAS c .
- Sea HT_c el número de horas al día que opera el CAS c .
- Sea DT_c el número de días al mes que opera el CAS c .
- Sea P el presupuesto total del mes con el que cuenta este grupo de estudiantes.
- Sea CAM_c el costo de armar un mercado en el CAS c .

- Sea $CEM_{c,r}$ el costo de enviar un mercado desde el CAS c a una familia con prioridad r .
- Sea NF_r el número de familias con prioridad r identificadas.
- Se permite la operación en máximo seis CAS.
- Se debe entregar un mercado a por lo menos el 10 % de las familias clasificadas con nivel de prioridad 3.
- Se debe entregar un mercado a por lo menos el 20 % de las familias clasificadas con nivel de prioridad 4.
- Se debe entregar un mercado a por lo menos el 40 % de las familias clasificadas con nivel de prioridad 5.

Teniendo en cuenta lo anterior, se requiere formular un modelo de programación lineal que sirva a este grupo de estudiantes y a otros en contextos similares para determinar de manera objetiva el número de familias con prioridad r a las que cada centro c enviará un mercado, de tal forma que se maximice la suma del índice de prioridad de las familias beneficiadas por los mercados en el próximo mes. Tenga presente la cantidad de kilogramos que, según se ha definido, lleva cada mercado según el parámetro PM_p .

Solución ejercicio 1.10

Conjuntos

c Cas

r Prioridad

p Productos

Variables de decisión

$X_{c,r}$: número de familias r que recibirán mercados del CAS c

$$Y_c \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ Si se coloca en operación en CAS } c \text{ para el envío} \\ \text{de los mercados} \\ 0 \text{ DLC} \end{array} \right\}$$

Parámetros

PM_p es el número de kilogramos del producto p que debe llevar incorporado cada mercado.

$DP_{c,p}$ son los kilogramos disponibles en el CAS c del producto p .

TP_c es la tasa de producción por hora del CAS c , es decir, el número de mercados que arma el CAS c por hora.

HT_c es el número de horas al día que opera el CAS c .

DT_c es el número de días al mes que opera el CAS c .

P es el presupuesto total del mes con el que cuenta este grupo de estudiantes.

CAM_c es el costo de armar un mercado en el CAS c .

$CEM_{c,r}$ es el costo de enviar un mercado desde el CAS c a una familia con prioridad r .

NF_r es el número de familias con prioridad r identificadas.

Modelo matemático

F. O.:

$$Z = \text{Max} \sum_c \sum_r (NP_r X_{c,r})$$

Restricciones:

Sea $DP_{c,p}$ los kilogramos disponibles en el CAS c del producto p :

$$\sum_r (PM_p X_{c,r}) \leq DP_{c,p} \quad \forall c \quad \forall p$$

Tiempo disponible de operación en el mes de cada CAS c :

$$\sum_r \left(\frac{X_{c,r}}{TP_c} \right) \leq HT_c DT_c \quad \forall c$$

Disponibilidad presupuestal al mes:

$$\sum_c \sum_r ((CAM_c + CEM_{c,r}) X_{c,r}) \leq P$$

Máximo número de familias en cada prioridad:

$$\sum_c (X_{c,r}) \leq NF_r \quad \forall r$$

Se permite la operación en máximo seis CAS:

$$\sum_c (Y_c) \leq 6$$

Si el CAS c no entra en operación, entonces de allí no deberá salir ningún mercado. En otras palabras, si el valor de Y para un CAS llega a ser cero, entonces desde este no podrán salir mercados. Se coloca al lado derecho el valor de un millón, pero puede ser cualquier valor, lo importante es que sea grande. ¿Qué tan grande? Para el contexto del ejercicio, puede ser el máximo de mercados que podría enviar un CAS:

$$\sum_r (X_{c,r}) \leq 1000000Y_c \quad \forall c$$

Según las condiciones dadas, se debe entregar un mercado a por lo menos el 10 % de las familias clasificadas con nivel de prioridad 3:

$$\sum_c (X_{c,3}) \geq 0,1 * NF_3$$

Se debe entregar un mercado a por lo menos el 20 % de las familias clasificadas con nivel de prioridad 4:

$$\sum_c (X_{c,4}) \geq 0,2 * NF_4$$

Se debe entregar un mercado a por lo menos el 40 % de las familias clasificadas con nivel de prioridad 5:

$$\sum_c (X_{c,5}) \geq 0,4 * NF_5$$

Restricción de no negatividad:

$$X_{c,r} \geq 0 \quad \forall c \forall r$$

$$Y_c \in \{0,1\} \forall c$$

Ejercicio de aplicación 1.10

Formule y resuelva el problema en GAMS a partir de los valores especificados en las tablas 1.27 a 1.34. Presente la solución (variables y valor Z) en un archivo de Excel, no con la salida textual de GAMS, sino en matrices de Excel.

PM_p es el número de kilogramos del producto p necesarios para armar un mercado.

Tabla 1.27. Número de kilogramos necesarios de cada producto

Producto	PM
1	1
2	0,5
3	0,25
4	1
5	0,5
6	2
7	1
8	0,5
9	1
10	2

$DP_{c,p}$ es los kilogramos disponibles en el CAS c del producto p .

Tabla 1.28. Número de kilogramos disponibles en cada CAS por cada uno de los productos

DP (c,p)	Producto									
CAS	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1090	460	440	940	640	2040	1160	620	910	1850
2	690	410	320	660	480	1450	640	360	800	1620
3	720	520	180	700	580	1570	930	350	880	1600
4	990	600	290	1260	670	2280	1030	690	1320	2140
5	1420	600	350	1360	740	2700	1290	740	1350	2510
6	910	620	300	1130	600	2170	900	430	1150	2110
7	1190	700	250	930	680	1920	1180	590	1240	2010
8	970	440	380	1030	430	1490	920	330	820	1620

TP_c es la tasa de producción por hora del CAS c ; es decir, número de mercados que arma el CAS c por hora.

Tabla 1.29. Tasa de producción por hora de cada CAS

CAS	TP
1	8
2	9
3	12
4	10
5	9
6	10
7	8
8	11

HT_c es el número de horas al día que opera el CAS c .

Tabla 1.30. Número de horas del día que opera el CAS

CAS	HT
1	6
2	4
3	4
4	8
5	8
6	6
7	6
8	4

DT_c es el número de días al mes que opera el CAS c .

Tabla 1.31. Número de días que opera el CAS

CAS	DT
1	24
2	20
3	16
4	23
5	22
6	21
7	21
8	18

P es el presupuesto total del mes con el que cuenta este grupo de estudiantes.

$$P: \text{COP } 70\,000\,000$$

CAM_c es el costo de armar un mercado en el CAS c .

Tabla 1.32. Costo de armar un mercado en cada CAS

CAS	CAM (COP)
1	1800
2	1700
3	1500
4	1300
5	1300
6	1200
7	1200
8	1400

$CEM_{c,r}$ es el costo de enviar un mercado desde el CAS c a una familia con prioridad r .

Tabla 1.33. Costo de enviar un mercado desde cada uno de los CAS a una familia con cada tipo de prioridad

CEM	Nivel de prioridad (COP)				
	CAS	1	2	3	4
1	3100	3700	4300	7000	6000
2	6600	3600	5800	6500	4400
3	4000	3600	4800	6900	5300
4	4400	6000	5000	4000	5600
5	4500	4300	6000	4000	5900
6	6700	6500	6200	4000	5100
7	5000	6500	5100	5900	3200
8	6800	5500	3900	3400	4700

NF_r es el número de familias con prioridad r identificadas.

Tabla 1.34. Número de familias por cada tipo de prioridad

Prioridad	NF
1	1328
2	2977
3	2696
4	2482
5	2081

Ejercicio 1.11

Compra de productos para ensamble de mercados entregados por los Centros de Acopio para la Solidaridad

En el marco de las iniciativas para minimizar el impacto de la pandemia por COVID-19 en la alimentación de familias que han visto reducidos (casi a cero) sus ingresos, un grupo de estudiantes de la Universidad Central se ha organizado en c Centros de Acopio para la Solidaridad (CAS) en la ciudad de Bogotá, con el fin de llevar mercados a familias priorizadas que se han identificado y clasificado como se describe a continuación.

Cada CAS compra p productos de primera necesidad a m proveedores. Luego, los acopia en los CAS para ensamblar mercados y distribuirlos a k familias de la comunidad de universidades del centro de la ciudad identificadas con anterioridad. Desafortunadamente, no es posible suplir con mercados a todas las familias identificadas, por lo cual se ha asignado un valor entre 1 y 5 a cada familia que representa su nivel de prioridad frente a la necesidad de recibir este mercado en el marco de su contexto y sus necesidades. El valor de 1 representa poco prioritario y 5, muy prioritario. Para esto, se cuenta con la siguiente información:

- Sea PM_p el número de kilogramos del producto p necesarios para armar un mercado.
- Sea $D_{m,p}$ los kilogramos disponibles en el proveedor m del producto p .
- Sea TP_c la tasa de producción por hora del CAS c ; es decir, el número de mercados que arma el CAS c por hora.
- Sea HT_c el número de horas al día que opera el CAS c .
- Sea DT_c el número de días al mes que opera el CAS c .
- Sea P el presupuesto total del mes con el que cuenta este grupo de estudiantes.
- Sea $CCP_{p,m}$ el costo por kilogramo de producto p en el proveedor m .

- Sea $CFE_{c,m}$ el costo fijo por pedido de transportar o enviar al CAS c los productos comprados en el proveedor m .
- Sea CAM_c el costo de armar un mercado en el CAS c .
- Sea $CEM_{c,r}$ el costo de enviar un mercado desde el CAS c a una familia con prioridad r .
- Sea NF_r el número de familias con prioridad r identificadas.
- Se permite la operación en máximo seis CAS.
- Se deben entregar por lo menos 5000 mercados, es decir, beneficiar a por lo menos 5000 familias.
- Se permite comprar a máximo dos proveedores.
- Se debe entregar un mercado a por lo menos el 10 % de las familias clasificadas con nivel de prioridad 3.
- Se debe entregar un mercado a por lo menos el 20 % de las familias clasificadas con nivel de prioridad 4.
- Se debe entregar un mercado a por lo menos el 40 % de las familias clasificadas con nivel de prioridad 5.

Teniendo en cuenta lo anterior, es necesario formular un modelo de programación lineal que sirva a este grupo de estudiantes y a otros en contextos similares para determinar de manera objetiva el plan de compra, ensamblaje y entrega de mercados a las familias, de forma tal que se minimicen los costos totales para el próximo mes.

Ejercicio de aplicación 1.11

Formule y resuelva el problema en GAMS a partir de los datos suministrados en las tablas 1.35 a 1.44. Presente la solución (variables y valor Z) en un archivo de Excel, no con la salida textual de GAMS, sino en matrices de Excel.

Datos

PM_p es el número de kilogramos del producto p necesarios para armar un mercado.

Tabla 1.35. Kilogramos necesarios de cada producto

Producto	PM
1	1
2	0,5
3	0,25
4	1
5	0,5
6	2
7	1
8	0,5
9	1
10	2

$D_{m,p}$ es los kilogramos disponibles en el proveedor m del producto p .

Tabla 1.36. Disponibilidad de kilogramos en el proveedor m del producto p

DP (c,p)	Producto									
	CAS	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1090	460	440	940	640	2040	1160	620	910	1850
2	690	410	320	660	480	1450	640	360	800	1620
3	720	520	180	700	580	1570	930	350	880	1600
4	990	600	290	1260	670	2280	1030	690	1320	2140
5	1420	600	350	1360	740	2700	1290	740	1350	2510
6	910	620	300	1130	600	2170	900	430	1150	2110
7	1190	700	250	930	680	1920	1180	590	1240	2010
8	970	440	380	1030	430	1490	920	330	820	1620

TP_c es la tasa de producción por hora del CAS c , es decir, el número de mercados que por hora arma el CAS c

Tabla 1.37. Unidades producidas por hora de cada CAS

CAS	TP
1	8
2	9
3	12
4	10
5	9
6	10
7	8
8	11

HT_c es el número de horas al día que opera el CAS c .

Tabla 1.38. Horas del día que opera el CAS

CAS	HT
1	6
2	4
3	4
4	8
5	8
6	6
7	6
8	4

DT_c es el número de días al mes que opera el CAS c .

Tabla 1.39. Días que opera el CAS

CAS	DT
1	24
2	20
3	16
4	23
5	22
6	21
7	21
8	18

P es el presupuesto total del mes con el que cuenta este grupo de estudiantes.

$$P: \text{COP } 300\,000\,000$$

$CCP_{p,m}$ es el costo (en COP) por kilogramo de producto p en el proveedor m .

Tabla 1.40. Costo (en COP) por kilogramo de producto p en el proveedor m

CCP(p,m)	Proveedor			
	Producto	1	2	3
1	2600	2500	2400	2400
2	3600	3900	3900	3400
3	1700	1700	1700	1800
4	3300	3000	3500	3300
5	2000	1900	2200	1800
6	2900	3000	3000	3100
7	1700	1600	1700	1800
8	2300	2500	2100	2200
9	2800	2900	2600	2600
10	2600	2500	2500	2600

$CFE_{c,m}$ es el costo fijo (en COP) por pedido de transportar o enviar al CAS c los productos comprados en el proveedor m

Tabla 1.41. Costo fijo por pedido (en COP) de transportar o enviar al CAS c desde el proveedor m

CFE(c,m)	Proveedor			
	CAS	1	2	3
1	2 600 000	3 400 000	3 200 000	2 300 000
2	3 600 000	3 200 000	2 700 000	2 800 000
3	1 700 000	2 500 000	2 300 000	3 400 000
4	3 300 000	2 500 000	2 700 000	2 000 000
5	2 000 000	3 200 000	3 000 000	3 000 000
6	2 900 000	3 200 000	2 300 000	2 100 000
7	1 700 000	2 500 000	2 000 000	2 900 000
8	2 300 000	2 500 000	2 900 000	2 700 000

CAM_c es el costo de armar un mercado en el CAS c .

Tabla 1.42. Costo de armar un mercado en cada CAS

CAS	CAM (COP)
1	1800
2	1700
3	1500
4	1300
5	1300
6	1200
7	1200
8	1400

$CEM_{c,r}$ es el costo de enviar un mercado desde el CAS c a una familia con prioridad r .

Tabla 1.43. Costo de enviar un mercado desde cada uno de los CAS a una familia con cada tipo de prioridad

CEM CAS	Nivel de prioridad (COP)				
	1	2	3	4	5
1	3100	3700	4300	7000	6000
2	6600	3600	5800	6500	4400
3	4000	3600	4800	6900	5300
4	4400	6000	5000	4000	5600
5	4500	4300	6000	4000	5900
6	6700	6500	6200	4000	5100
7	5000	6500	5100	5900	3200
8	6800	5500	3900	3400	4700

NF_r es el número de familias con prioridad r identificadas.

Tabla 1.44. Número de familias por cada tipo de prioridad

Prioridad	NF
1	1328
2	2977
3	2696
4	2482
5	2081

Ejercicio 1.12

Optimización del nivel de satisfacción en procesos de compra de alimentos en tiempos de pandemia

En el marco de la medida de aislamiento preventivo obligatorio decretada por el Gobierno nacional, se busca generar un modelo de programación lineal que pueda ser usado por cualquier familia en las principales ciudades de Colombia, para definir el plan de compra de sus alimentos y maximizar su nivel de satisfacción mensual total por esta compra. Para esto, se cuenta con la siguiente información:

- Sea F el número de personas o integrantes de la familia.
- Sea PM el peso máximo de los alimentos comprados permitido por viaje o salida.
- Sea R_a el valor mínimo de kilogramos de alimento a que necesita quincenalmente la familia.
- Sea P el presupuesto mensual total de la familia para comprar sus alimentos.
- Sea $NS_{i,a}$ el nivel de satisfacción o preferencia del integrante i de la familia por la compra de cada kilogramo del alimento a . Este es un valor entre 1 y 10, donde 1 representa que no lo prefiere o no lo satisface y 10 que lo prefiere totalmente o que lo satisface totalmente.
- Sea v el conjunto de los viajes o salidas para comprar alimentos. Este conjunto va del 1 al 5, pues a lo sumo se espera que el plan de compras incluya cinco viajes.
- Sea $CN_{a,n}$ las unidades de nutrientes n que contiene un kilogramo de alimento a .
- Sea RN_n las unidades mínimas de nutriente n requeridas al mes por persona.
- Sea $CA_{a,s}$ el costo por kilogramo del alimento a en el supermercado s .
- Sea $KD_{a,s}$ los kilogramos mensuales disponibles del alimento a en el supermercado s .

- Se requiere que para cada integrante de la familia, el nivel promedio de satisfacción por los alimentos comprados al mes sea de al menos 6.
- Debido a las filas que se forman en cada supermercado, en ninguno de los viajes se debe comprar menos de 2 kilogramos de alimento en un supermercado. No vale la pena dedicar tiempo a hacer una fila para comprar 2 o menos kilogramos de alimento.

Teniendo en cuenta lo anterior, se deberá formular un modelo de programación lineal que sirva a las familias para definir su plan de compras mensual. Este debe detallar los kilogramos de alimento a a comprar en el supermercado s en el viaje o salida v .

Solución ejercicio 1.12

Conjuntos

i Integrante

a Alimentos

s Supermercados

v Viajes

n Nutriente

Variables de decisión

$X_{a,s,v}$: kilogramos de alimento a a comprar en el supermercado s en el viaje v

$$Y_{s,v} \begin{cases} 1 & \text{Si se compran alimentos en el supermercado} \\ & \text{s en el viaje } v \\ 0 & \text{DLC} \end{cases}$$

Modelo matemático

F. O.:

$$Z = \text{Max} \sum_i \sum_a \sum_s \sum_v (NS_{i,a} X_{a,s,v})$$

Restricciones:

Peso máximo de alimentos comprados permitido por viaje o salida:

$$\sum_a \sum_s (X_{a,s,v}) \leq PM \quad \forall v$$

Requerimiento mínimo de kilogramos de alimento a que necesita quincenalmente la familia:

$$\sum_s \sum_v (X_{a,s,v}) \geq 2R_a \quad \forall a$$

Presupuesto mensual total de la familia para comprar sus alimentos:

$$\sum_a \sum_s \sum_v (CA_{a,s} X_{a,s,v}) \leq P$$

Unidades mínimas requeridas al mes de nutriente n por persona:

$$\sum_a \sum_s \sum_v (CN_{a,n} X_{a,s,v}) \geq F * RN_n \quad \forall n$$

Kilogramos mensuales disponibles del alimento a en el supermercado s :

$$\sum_v (X_{a,s,v}) \leq KD_{a,s} \quad \forall a \quad \forall s$$

Se requiere que para cada integrante de la familia el nivel promedio de satisfacción por los alimentos comprados al mes sea de al menos 6:

$$\sum_a \sum_s \sum_v (NS_{i,a} X_{a,s,v}) \geq \sum_a \sum_s \sum_v (6X_{a,s,v}) \quad \forall i$$

Debido a las filas que se forman en cada supermercado, en ninguno de los viajes se debe comprar menos de 2 kilogramos de alimento:

$$\sum_a (X_{a,s,v}) \geq 2Y_{s,v} \quad \forall s \quad \forall v$$

$$\sum_a (X_{a,s,v}) \leq 1\,000\,000 Y_{s,v} \quad \forall s \quad \forall v$$

Restricción de no negatividad:

$$X_{a,s,v} \geq 0 \quad \forall a \quad \forall s \quad \forall v$$

$$Y_{s,v} \in \{0,1\} \quad \forall s \quad \forall v$$

Ejercicio de aplicación 1.12

Use los datos de las tablas 1.45 a 1.50 para resolver el problema y efectuar los ajustes necesarios a la formulación si ahora el número de viajes o salidas al mes será de máximo tres. El problema puede arrojar la misma solución, brindar una diferente o ser infactible.

Datos

F es el número de personas o integrantes en la familia:

$$F: 4$$

PM es el peso máximo permitido por viaje o salida, por concepto de alimentos comprados:

$$PM: 34$$

R_a es el mínimo de kilogramos de alimento a que necesita quincenalmente la familia:

Tabla 1.45. Número mínimo de kilogramos que necesita quincenalmente una familia

Alimento	R(a)
1	10
2	8
3	3
4	6
5	3,6
6	12

P es el presupuesto mensual total de la familia para comprar sus alimentos

P : COP 1 000 000

$NS_{i,a}$ es el nivel de satisfacción o preferencia del integrante i de la familia por la compra de cada kilogramo del alimento a . Este es un valor entre 1 y 10, donde 1 representa que no lo prefiere o no lo satisface y 10 que lo prefiere totalmente o que lo satisface totalmente.

Tabla 1.46. Nivel de satisfacción de cada integrante de la familia por cada uno de los alimentos

NS(i,a)	Alimento					
	1	2	3	4	5	6
Integrante	1	2	3	4	5	6
1	8	5	7	8	8	6
2	4	8	6	4	4	9
3	7	7	5	4	5	8
4	7	5	4	6	8	6

$CN_{a,n}$ es las unidades de nutriente n que contiene un kilogramo de alimento a .

Tabla 1.47. Cantidad de nutrientes en cada alimento

CN(a,n)	Nutriente							
	Alimento	1	2	3	4	5	6	7
1	3	3	3	6	3	4	4	
2	5	3	4	6	3	3	3	
3	6	4	5	6	4	3	3	
4	6	3	6	6	3	5	6	
5	4	6	3	4	3	6	5	
6	6	6	3	4	5	4	4	

RN_n es las unidades mínimas de nutriente n requeridas al mes por persona.

Tabla 1.48. Unidades de nutrientes requeridas por cada persona

Nutriente	$RN(n)$
1	49
2	33
3	54
4	39
5	48
6	35
7	34

$CA_{a,s}$ es el costo por kilogramo del alimento a en el supermercado s .

Tabla 1.49. Costo de cada alimento en cada supermercado

CA(a,s)	Supermercado (COP)			
	Alimento	1	2	3
1	3400	3300	2600	
2	3200	4200	2600	
3	2500	2900	4000	
4	3100	3900	3100	
5	2600	3800	3400	
6	2200	3700	1800	

$KD_{a,s}$ es los kilogramos mensuales disponibles del alimento a en el supermercado s .

Tabla 1.50. Número de kilogramos disponibles de cada alimento en cada supermercado

KD(a,s)	Supermercado		
Alimento	1	2	3
1	63	72	54
2	57	66	72
3	58	65	76
4	56	63	78
5	59	52	75
6	57	76	74

Ejercicio 1.13

Selección de proyectos para el desarrollo de comunidades en el marco de los planes de desarrollo distritales

El plan de desarrollo de la actual Alcaldía Mayor de Bogotá se vio afectado por una reducción en el presupuesto para la ejecución de los proyectos programados para los próximos tres años. Se tiene la siguiente información:

- P : proyectos para ser ejecutados en los próximos tres años.
- $INV_{(p,a)}$: inversión (en millones de pesos) que requiere el proyecto p durante el año a en su ejecución.
- $U_{(p,a)}$: es un parámetro binario que describe con 1 si el proyecto p estaría en ejecución en el año a , en caso de ser ejecutado.
- $F_{(p,l)}$: número de familias beneficiadas en la localidad l con la ejecución del proyecto p . Cuando aparece valor cero, dicha localidad no se ve beneficiada con la ejecución de ese proyecto.
- $D_{(p,e)}$: parámetro binario que describe con 1 si la gestión y el seguimiento al proyecto p estaría a cargo de la entidad e , en caso de ser ejecutado.
- $P_{(e,a)}$: presupuesto (en millones de pesos) de la entidad e para ejecutar, gestionar y hacer seguimiento a los proyectos ejecutados en el año a .

Debido a la reducción en el recaudo de impuestos y, en general, a la disminución de los ingresos del Distrito para la ejecución de proyectos a causa de la pandemia de COVID-19, no es posible ejecutar todos los proyectos previstos, por lo cual se debe escoger solo algunos de estos a partir de las siguientes condiciones:

- Se debe beneficiar a por lo menos Q familias de cada localidad l al cabo de los tres años.
- Ninguna entidad puede ejecutar, gestionar y hacer seguimiento a más proyectos de los que le permite su disponibilidad presupuestal.

- Cada año debe contar con la ejecución de al menos el 25 % del total de proyectos ejecutados.

Ejercicio de aplicación 1.13

Formule y resuelva el problema para identificar qué proyectos deben ejecutarse de forma que se maximice el número de familias a beneficiar con la ejecución de los proyectos seleccionados y se cumpla con las condiciones especificadas.

Datos

Q: 1 000 000 de familias

$INV_{(p,a)}$ es la inversión (en millones de pesos) que requiere el proyecto p durante el año a en su ejecución.

Tabla 1.51. Inversión necesaria por cada proyecto en cada año

Proyecto	Año 1 (COP)	Año 2 (COP)	Año 3 (COP)
1	178	263	268
2	279	201	298
3	236	300	185
4	261	250	140
5	212	339	326
6	247	257	157
7	268	159	214
8	266	311	315
9	223	158	165
10	143	179	209
11	198	336	220
12	122	350	313
13	229	326	190
14	305	288	293
15	153	173	167
16	177	192	255
17	126	168	171
18	165	184	224
19	193	184	126

Proyecto	Año 1 (COP)	Año 2 (COP)	Año 3 (COP)
20	242	353	154
21	223	287	318
22	130	204	162
23	167	227	181
24	348	186	138
25	247	280	204

$U_{(p,a)}$ es un parámetro binario que describe con 1 si el proyecto p estaría en ejecución en el año a en caso de ser ejecutado.

Tabla 1.52. Parámetro que muestra si un proyecto está en ejecución en cada año

Proyecto	Año 1	Año 2	Año 3
1	1	1	0
2	0	1	1
3	0	0	1
4	0	1	0
5	1	1	1
6	0	1	0
7	1	0	0
8	1	1	0
9	1	1	1
10	1	0	0
11	1	0	0
12	0	1	1
13	1	0	0
14	0	0	1
15	1	1	0
16	0	1	1
17	0	1	1
18	0	1	0
19	0	1	1
20	0	1	0
21	1	0	0
22	0	0	1
23	0	0	1
24	0	1	1
25	0	1	1

$F_{(p,l)}$ es el número de familias beneficiadas en la localidad l con la ejecución del proyecto p . El valor cero indica que la localidad no se ve beneficiada con la ejecución de ese proyecto.

Tabla 1.53. Número de personas beneficiadas con un proyecto en cada localidad

Proyecto	Localidad			
	1	2	3	4
1	183 670	0	102 540	0
2	0	153 340	176 140	0
3	184 400	105 320	0	171 650
4	138 890	0	193 300	153 560
5	172 570	146 440	0	0
6	0	0	127 880	148 730
7	90 470	0	115 400	103 880
8	0	139 980	0	0
9	188 080	192 880	181 780	0
10	157 150	0	0	139 780
11	0	135 690	101 150	123 470
12	129 270	127 790	119 790	186 060
13	0	120 750	0	88 970
14	107 040	0	0	83 380
15	181 410	141 070	175 180	0
16	112 950	137 320	0	0
17	146 900	152 630	161 810	160 900
18	173 620	0	198 310	123 360
19	109 650	187 060	0	112 430
20	0	0	171 130	91 090
21	987 70	112 320	176 320	188 990
22	157 100	147 460	128 550	0
23	0	155 180	174 520	102 750
24	146 620	0	132 830	162 430
25	162 910	95 000	0	96 840

$D_{(p,e)}$ es un parámetro binario que describe con 1 si la gestión y el seguimiento al proyecto p estaría a cargo de la entidad e en caso de ser ejecutado.

Tabla 1.54. Parámetro que muestra cuál entidad estaría a cargo de la ejecución de cada proyecto

Proyecto	Entidad gestora			
	1	2	3	4
1	0	1	0	0
2	0	0	1	0
3	1	0	0	0
4	0	0	0	1
5	0	0	1	0
6	1	0	0	0
7	0	1	0	0
8	0	0	0	1
9	0	0	1	0
10	0	1	0	0
11	1	0	0	0
12	1	0	0	0
13	0	0	1	0
14	0	0	0	1
15	0	1	0	0
16	0	1	0	0
17	0	0	1	0
18	0	0	0	1
19	0	0	0	1
20	0	0	1	0
21	1	0	0	0
22	1	0	0	0
23	0	0	1	0
24	1	0	0	0
25	0	1	0	0

$P_{(e,a)}$ es el presupuesto (en millones de pesos) de la entidad e para ejecutar, gestionar y hacer seguimiento a los proyectos ejecutados en el año a .

Tabla 1.55. Presupuesto de cada entidad para la ejecución de cada proyecto

	1 (COP)	2 (COP)	3 (COP)
1	350	500	1000
2	600	840	800
3	700	600	500
4	750	930	400



Cadenas de Markov

Son muchas las incertidumbres sobre todos los fenómenos que circundan una pandemia. La COVID-19 les ha demostrado a científicos, líderes y gobernantes que el azar, la tendencia a la entropía y la aleatoriedad son los principios reinantes. Por esto, tomar decisiones se convierte en un proceso de alta dificultad y responsabilidad ética.

Una de las herramientas que han usado los encargados de informar las políticas públicas de salud preventiva y correctiva durante la pandemia son los procesos estocásticos o probabilísticos, que permiten estudiar fenómenos cuyo comportamiento u operación pueden ser descritos y estudiados en función de variables aleatorias y, por lo general, medibles. Estas variables son estudiadas respecto a otras, usualmente respecto al tiempo.

Contenido

- Ejercicio 2.1
- Ejercicio 2.2
- Ejercicio 2.3
- Ejercicio 2.4
- Ejercicio 2.5
- Ejercicio 2.6

En este capítulo se presentan ejercicios y aplicaciones de procesos estocásticos que pueden caracterizarse como procesos markovianos, que son aquellos que cumplen con la condición de Markov, ampliamente descrita en la literatura. Asimismo, se presentan ejercicios que incluyen variables aleatorias finitas y en periodos de tiempo discretos.

Cada ejercicio se enmarca en un contexto que se modela como una cadena de Markov, se soluciona a través de operaciones matriciales y propone una aplicación para ser resuelta por el lector. De esta manera, el lector podrá poner en práctica sus conocimientos y desarrollar experticia en el manejo de la herramienta matemática.

Ejercicio 2.1

Uso de cadenas de Markov para estimar la tasa de producción con intermitencia laboral – Parte I

Una familia en la ciudad de Bogotá, por el impacto que ha tenido la pandemia de COVID-19 en sus ingresos, ha decidido fabricar tapabocas para suplir parte de sus necesidades económicas y, a la vez, contribuir a suplir la demanda de este producto en el mercado, que ha aumentado luego de que el Gobierno distrital lo decretara como elemento de uso obligatorio en espacios públicos en los que no se pueda garantizar una distancia mínima de dos metros.

En la familia, Juan y María son las personas que participan en la fabricación de este producto. La tasa media de producción por día de cada uno de ellos es de 70 tapabocas. Como en una microempresa normal, por distintas razones, no todos los días están fabricando los dos. Cada uno puede estar laborando o no laborando en cada día. De hecho, la probabilidad de que Juan no labore un día cualquiera, dado que laboró el día anterior, es de 0,3, y la probabilidad de que labore un día cualquiera, ya que el día anterior no laboró, es de 0,8. Por otra parte, la probabilidad de que María labore un día cualquiera, dado que laboró el día anterior, es de 0,9, y la probabilidad de que no labore un día cualquiera, ya que el día anterior no laboró, es de 0,1.

Si Juan no laboró hoy, ¿cuál es la probabilidad de que labore en exactamente dos de los próximos tres días?

Solución ejercicio 2.1

Primero, se identifica la matriz de probabilidades de transición un paso adelante para Juan (tabla 2.1).

Tabla 2.1. Matriz de probabilidades de transición un paso adelante para Juan

	No labora	Sí labora
No labora	0,2	0,8
Sí labora	0,3	0,7

Luego, se calcula la probabilidad requerida al generar las distintas opciones que cumplen las condiciones expuestas en el enunciado de la pregunta (tabla 2.2).

Tabla 2.2. Probabilidad de que labore en exactamente dos de los próximos tres días

X(t)	X(t+1)	X(t+2)	X(t+3)	Subtotal
No labora	Sí labora	Sí labora	No labora	
	0,8	0,7	0,3	0,168
No labora	Sí labora	No labora	Sí labora	
	0,8	0,3	0,8	0,192
No labora	No labora	Sí labora	Sí labora	
	0,2	0,8	0,7	0,112
Total				0,472

Ejercicio de aplicación 2.1

- Si hoy no laboró Juan, pero María sí, ¿cuál es la probabilidad de que mañana labore al menos uno de los dos?
- Si hoy fueron a laborar Juan y María, ¿cuál es la probabilidad de producir al menos 210 tapabocas en los próximos dos días?
- Sea $X(t)$ el número de personas de la familia que laboran en el día t , construya la matriz de probabilidades de transición un paso adelante asociada a ese contexto.

Ejercicio 2.2

Uso de cadenas de Markov para estimar la tasa de producción con intermitencia laboral – Parte II

Una familia en la ciudad de Bogotá, por el impacto que ha tenido la pandemia de COVID-19 en sus ingresos, ha decidido fabricar tapabocas para suplir parte de sus necesidades económicas y, a la vez, contribuir a suplir la demanda de este producto en el mercado, que ha aumentado luego de que el Gobierno distrital lo decretara como elemento de uso obligatorio en espacios públicos en los que no se pueda garantizar una distancia mínima de dos metros.

En la familia, son tres las personas que participan en la fabricación de este producto: Juan, María y Tatiana. La tasa media de producción por hora de cada uno es: Juan: 20 tapabocas por hora, María: 24 tapabocas por hora y Tatiana: 18 tapabocas por hora. Como en una microempresa normal, por distintas razones, no todos los días están fabricando todos los operarios; cada uno puede estar laborando o no laborando en cada día. De hecho, la probabilidad de que Juan no labore un día cualquiera, dado que laboró el día anterior, es de 0,18, y la probabilidad de que labore un día cualquiera, dado que el día anterior no laboró es de 0,94.

Por otra parte, la probabilidad de que María labore un día cualquiera dado que laboró el día anterior es de 0,84, y la probabilidad de que no labore un día cualquiera dado que el día anterior no laboró es de 0,06. De igual forma, la probabilidad de que Tatiana labore un día cualquiera dado que no laboró el día anterior es de 0,64, y la probabilidad de que no labore un día cualquiera dado que el día anterior laboró es de 0,20. Asimismo, tenga en cuenta que cuando Juan labora, lo hace por 6 horas al día; cuando María labora, lo hace por 4 horas al día, y cuando Tatiana labora, lo hace por 3 horas al día.

Entonces, ¿cuántos tapabocas se espera que produzca la microempresa el próximo mes? Construya la matriz de probabilidades de transición que represente el contexto a partir de la definición de $X(t)$ como el número de personas que están laborando el t -ésimo día.

Solución ejercicio 2.2

Primero se define la matriz de probabilidades de transición para cada fabricante (tabla 2.3).

Tabla 2.3. Matriz de probabilidades de transición de Juan, María y Tatiana

$p^{(1)}$	Trabaja	No trabaja
Juan		
Trabaja	0,82	0,18
No trabaja	0,94	0,06
María		
Trabaja	0,84	0,16
No trabaja	0,94	0,06
Tatiana		
Trabaja	0,8	0,2
No trabaja	0,64	0,36

Luego, se calculan las probabilidades de estado estable para identificar la proporción esperada de tiempo que la persona estará laborando (tabla 2.4).

Tabla 2.4. Matriz de probabilidades de estado estable de Juan, María y Tatiana

$p^{(1)}$	Trabaja	No trabaja
Juan		
Trabaja	0,83928571	0,16071429
No trabaja	0,83928571	0,16071429

$p^{(1)}$	Trabaja	No trabaja
María		
Trabaja	0,85454545	0,14545455
No trabaja	0,85454545	0,14545455
Tatiana		
Trabaja	0,76190476	0,23809524
No trabaja	0,76190476	0,23809524

En resumen, se tiene la matriz de la tabla 2.5:

Tabla 2.5. Matriz de probabilidades de transición de Juan, María y Tatiana consolidada

	Trabaja	No trabaja
Juan	0,83928571	0,16071429
María	0,85454545	0,14545455
Tatiana	0,76190476	0,23809524

Posteriormente, se calcula la probabilidad de cada una de las combinaciones de personas laborando para un día dado y el número esperado de tapabocas que se producirían (tabla 2.6).

Tabla 2.6. Número esperado de tapabocas fabricados por día

Personas laborando	Probabilidad	N.º esperado de tapabocas/día
Ninguno	0,00556586	0
Juan	0,02906617	120
María	0,03269944	96
Tatiana	0,01781076	54
Juan y María	0,17076376	216
Juan y Tatiana	0,09301175	174
María y Tatiana	0,10463822	150
Los tres	0,54644403	270
Total de tapabocas esperados/día		223,89
Total de tapabocas esperados/mes		6716,8

Ahora, se construye la matriz de probabilidades de transición que representa ese contexto a partir de la definición de $X(t)$ (tabla 2.7).

Tabla 2.7. Matriz de probabilidades de transición por número de personas que están laborando el t -ésimo día

$p^{(t)}$	0	1	2	3
0	0,001296	0,042912	0,390288	0,565504
1	0,002688	0,063136	0,365664	0,568512
2	0,004816	0,073419	0,35871467	0,56305067
3	0,00576	0,07952	0,36368	0,55104

Ejercicio de aplicación 2.2

- Si hoy laboraron los tres fabricantes, ¿en promedio cuántos días pasarán hasta que vuelvan a laborar los tres? Derive su análisis de la matriz de la tabla 2.7.
- Encuentre el valor y exprese qué significa $m(0,3)$ en el contexto de tiempos promedio del primer paso.

Ejercicio 2.3

Restricción a la movilidad de personas a causa de la pandemia

Dadas las regulaciones de confinamiento y la medida de pico y género (hombres salen en los días de calendario impares y las mujeres salen en los días pares), el Distrito ha recolectado la siguiente estadística:

- De los ciudadanos que salieron el día que tenían restricción de género y no fueron multados, el 10 % volverán a salir el próximo día de restricción y no serán multados, y un 15 % volverá a salir y será multado. El resto respetará y cumplirá la restricción.
- De los ciudadanos que no salieron en su último día de restricción, el 6 % saldrá el próximo día en que tenga restricción y será multado. Asimismo, un 4 % infringirá la restricción en su próximo día de restricción, pero las autoridades no lo detectarán y no será multado.
- De las personas que fueron multadas en su último día de restricción por infringir la norma, el 98 % se quedará en casa en su próximo día de restricción, mientras que un 2 % saldrá y será multado nuevamente.

Si se define $X(t)$ como la condición en el día t de restricción frente a “infringió pero no fue multado”, “infringió y fue multado” y “respetó” la medida de pico y género, ¿cuál es la probabilidad de que una persona infrinja la restricción por tres días consecutivos y no sea multado dado que en el último día infringió la medida?

Solución ejercicio 2.3

Se identificó la variable: $X(t)$ = condición en el día t de restricción

$$X(t) = \begin{cases} 1: \text{Cumple} \\ 2: \text{Infrinje y es multado} \\ 3: \text{Infrinje y NO es multado} \end{cases}$$

Luego, se definió la matriz de probabilidades de transición un paso adelante (tabla 2.8).

Tabla 2.8. Matriz de probabilidades de transición un paso adelante

$p^{(1)}$	$X(t+1)$		
	1	2	3
1	0,9	0,06	0,04
2	0,98	0,02	0
3	0,75	0,15	0,1

La probabilidad solicitada se calculó como muestra la figura 2.1.

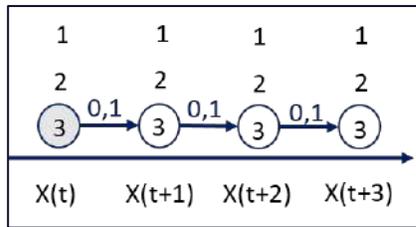


Figura 2.1. Probabilidad de que una persona infrinja la restricción por tres días consecutivos y no sea multado dado que en el último día infringió la medida.

A partir de esto, la solución se calculó como $0,1 \cdot 0,1 \cdot 0,1 = 0,001$.

Ejercicio de aplicación 2.3

Si el reporte de hoy indica que, de 400 000 ciudadanos, 370 000 respetaron la medida, 8000 la infringieron sin ser multados y 22 000 fueron multados por infringir la medida, ¿cuántos de los 400 000 serán multados por lo menos una vez al cabo de los próximos dos días?

Ejercicio 2.4

Prueba de COVID-19 usando pruebas serológicas

Una unidad de cuidados intensivos (UCI) de un hospital ubicado en la ciudad de Bogotá ha decidido aplicar pruebas rápidas (también conocidas como *serológicas*) al personal médico (18 personas) que a diario tiene contacto con pacientes de COVID-19, tanto los que se encuentran en las instalaciones del hospital como a quienes ya se les confirmó contagio por COVID-19.

Las pruebas se aplicarán cada siete días según datos históricos recopilados en todo Colombia y en países que han seguido medidas similares para evitar el contagio. Estas son las condiciones observadas:

- De cada 800 registros de personal médico que en una semana tuvo negativa su prueba serológica, la semana siguiente, 7 días después, 780 siguieron arrojando resultado negativo en sus pruebas. Sin embargo, 16 de ellos dieron resultado positivo en la prueba serológica a pesar de no mostrar síntomas, y los 4 registros restantes obtuvieron resultado positivo en la prueba serológica y tenían síntomas de COVID-19.
- Los datos históricos también muestran que, de aquellos que resultaron positivos y no tenían síntomas, en la semana siguiente el 64 % seguían contagiados sin síntomas, el 2 % presentaron resultado negativo en la prueba serológica (puede ocurrir, dado que no es una prueba 100 % confiable), el 8 % obtuvieron nuevamente positivo en el resultado de la prueba y ahora sí mostraban síntomas, el 24 % generaron anticuerpos contra el virus y se recuperaron, y el porcentaje restante habían fallecido antes de aplicar la prueba.
- Asimismo, de quienes en una semana dada recibieron prueba positiva y tenían síntomas, a la semana siguiente dos tercias partes seguían contagiados y con síntomas, una cuarta parte generaron anticuerpos contra el virus y se recuperaron, y el porcentaje restante fallecieron.
- Solo el 2 % de las personas que generaron anticuerpos y se recuperaron volvieron a arrojar resultado positivo en la prueba

serológica aunque ya no tenían síntomas. El porcentaje restante se mantuvo recuperado y sin contagio.

Si una persona del hospital que tiene contacto con pacientes de COVID-19 lleva dos semanas recibiendo resultados negativos en la prueba, ¿cuál es la probabilidad de que siga presentando resultados negativos en cada una de las próximas tres semanas?

Solución ejercicio 2.4

Se definió $X(t)$ como la condición de la persona del hospital, luego de aplicarle la prueba serológica en la t -ésima semana. Los estados de esta variable se definen como indica la tabla 2.9.

Tabla 2.9. Definición de estados

Estado	Descripción
RN	Resultado negativo
RPSS	Resultado positivo sin síntomas
RPCS	Resultado positivo con síntomas
OK	Se recuperó
F	Falleció

Luego de ello, se calculó la probabilidad como muestra la figura 2.2.

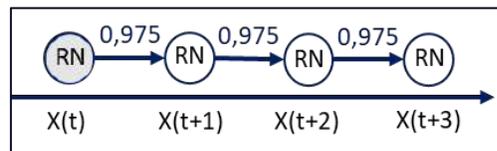


Figura 2.2. Probabilidad de que una persona siga presentando resultado negativo, en cada una de las próximas tres semanas

El valor solución es: $0,975 \cdot 0,975 \cdot 0,975 = 735/793$.

Ejercicio de aplicación 2.4

- Si en la semana actual, de las 18 personas a las que se les hace seguimiento, 10 arrojaron resultado negativo en la prueba serológica, 4 arrojaron positivo y no tienen síntomas, 1 arrojó positivo y tiene síntomas, 1 falleció y los 2 restantes ya generaron anticuerpos y se recuperaron, ¿cuántas personas se espera que arrojen resultado positivo (contagiadas) en el diagnóstico que se efectúe al cabo de dos semanas?
- Si una persona no tiene síntomas, pero arrojó resultado positivo tanto en la semana actual como en la anterior, ¿cuál es la probabilidad de que en al menos una de las dos semanas siguientes arroje resultado positivo en la prueba y presente síntomas?

Ejercicio 2.5

Modelando el acatamiento de la restricción a la movilidad de personas instaurada por alcaldías

Dadas las regulaciones de confinamiento y la medida de pico y género (hombres salen en los días de calendario impares y las mujeres salen en los días pares), el Distrito ha recolectado las siguientes estadísticas:

- De cada 80 ciudadanos que salen el día que tenían restricción de género sin ser multadas, el 15 % volverá a salir el próximo día de restricción y no serán multados, el 20 % volverá a salir y será multado, y el resto respetará la restricción.
- De cada 120 ciudadanos que no salieron en su último día de restricción, el 8 % saldrá el próximo día en que tenga restricción y será multado, el 4 % infringirá la restricción en su próximo día de restricción, pero las autoridades no lo detectarán y no será multado, y el resto cumplirá la medida.
- De las personas que fueron multadas en su último día de restricción por infringir la norma, el 98 % se quedará en casa en su próximo día de restricción, mientras que un 2 % saldrá y será multado nuevamente.

Por estadísticas de la Alcaldía Mayor de Bogotá, se sabe que para el próximo lunes 4 600 000 personas deberán seguir en casa cumpliendo la medida de aislamiento preventivo obligatorio. Sin embargo, se estima que el porcentaje de personas que incumplirá la medida seguirá siendo marcada por las probabilidades previamente mencionadas. Si se define $X(t)$ como la condición en el día t de restricción frente a si “respetó”, “infringió, pero no fue multado” o “infringió y fue multado” la medida de pico y género, ¿cuántos comparendos (multas) se espera que sean impuestos de lunes a viernes de la próxima semana debido a las personas que infringen la medida y son multados?

Solución ejercicio 2.5

Primero, se calculó la probabilidad para cada una de las posibles opciones de ser multado de lunes a viernes. Es decir, se calculó la probabilidad de que una persona que respetó la medida el domingo siga cumpliendo la medida hasta el jueves y que el viernes salga y sea multado. En este caso, se tendría un comparendo con dicha probabilidad para que valide el valor de esta: 0,04797. Se debe considerar que un comparendo en esa semana se puede obtener durante los demás días; es decir, puede que un individuo respete la medida hasta el miércoles, el jueves sea multado y el viernes no. Esta es otra forma o combinación de obtener un comparendo en la siguiente semana.

Luego de ello, se deben encontrar las combinaciones para obtener dos comparendos en la semana y calcular su probabilidad. Después, al realizar las combinaciones con tres, cuatro y cinco comparendos, se calcula su respectiva probabilidad. Teniendo en cuenta lo anterior, se obtuvo la tabla 2.10.

Tabla 2.10. Número esperado de comparendos

N.º de comparendos a la semana	N.º de posibles combinaciones	Probabilidad asociada	N.º esperado de comparendos a todas las
0	32	0,6427454192	0
1	80	0,3153975472	1 450 828,717
2	80	0,0405304352	372 880
3	40	0,0013178048	18 185,70624
4	10	0,0000087808	161,56672
5	1	0,0000000128	0,2944
Total de comparendos esperados			1 842 056

Ejercicio de aplicación 2.5

- El 18 % de las 3 200 000 personas que están exentas del aislamiento preventivo obligatorio usan Transmilenio para movilizarse, es decir, 18 % de las que pueden salir porque laboran en uno de los sectores están excluidas de la medida. Adicionalmente, con la entrada de personas que laboran en los sectores de construcción y manufactura,

que están libres de la medida, se espera que el sistema movilice 420 000 personas más por día. Por lo tanto, dicho sistema de transporte está en capacidad de movilizar a 2 400 000 personas por día. Teniendo en cuenta esto, ¿en qué porcentaje de su capacidad funcionará Transmilenio, en promedio, al sumar a las personas exentas que usan el sistema y las personas que en promedio usarán ese sistema para moverse a pesar de la medida? Asuma que el 15 % de los que deberían estar en casa pero infringen la medida usarán el sistema de transporte en mención para moverse.

- Una persona que es multada por infringir la medida, ¿cuántos días en promedio tarda en volver a infringir la medida, es decir, en salir sin estar exenta?

Ejercicio 2.6

Modelando los contagios de COVID-19

A partir de los datos publicados en mayo de 2020, de los pacientes que han resultado positivos para COVID-19 en la ciudad de Bogotá, se ha construido una matriz de probabilidades de transición de un paso adelante, en la que $X(t)$ representa la condición del paciente en el t -ésimo periodo (un periodo corresponde a 4 días) (tabla 2.11).

Tabla 2.11. Matriz de transición del estado de paciente con COVID-19

$P^{(1)}$		$X(t+1)$					
		Contagiado	Casa	Hospital	Hospital UCI	Recuperado	Fallecido
$X(t)$	Contagiado	0	0,5346	0,2312	0,135	0,0892	0,01
	Casa	0	0,4618	0,2664	0,0838	0,1658	0,0222
	Hospital	0	0,3454	0,3282	0,1546	0,1458	0,026
	Hospital UCI	0	0,1012	0,4772	0,2822	0,0658	0,0736
	Recuperado	0	0	0	0	1	0
	Fallecido	0	0	0	0	0	1

En promedio, ¿cuántos días pasan para que se defina la situación de una persona que resultó contagiada?

Solución ejercicio 2.6

Se calculó la matriz fundamental $(I - Q)^{-1}$ (tabla 2.12).

Tabla 2.12. Matriz fundamental del estado de paciente con COVID-19

	Contagiado	Casa	Hospital	Hospital UCI	
Contagiado	1	2,38835611	1,91603819	0,8795817	Total: 6,18397601 periodos
Casa	0	3,13949234	1,77720315	0,74929655	
Hospital	0	2,0259561	2,9042587	0,86204168	
Hospital UCI	0	1,78949969	2,1813391	2,07187949	

A partir de esto y teniendo en cuenta el enunciado, se señala que, en un periodo que corresponde a cuatro días, el número promedio de días es $6,18397601 * 4 = 24,735904$ días.

Ejercicio de aplicación 2.6

- ¿Cuál es la probabilidad de que finalmente una persona que está en el hospital (no en cuidados intensivos, solo hospitalizado) se recupere?

Logística

Las actividades que atañen a la logística han estado presentes desde hace mucho tiempo en el accionar del hombre y las empresas. Donde ha existido la necesidad de abastecimiento, ha estado presente la preparación para este y el concepto de logística. Por ejemplo, el general Antonie-Henri de Jomini incorporó el término en el campo bélico para señalar la preparación y el sostenimiento de campañas (tropas, ejércitos). En 1838, publicó un libro titulado *Précis de l'art de la guerre: des principales combinaisons de la stratégie, de la grande tactique et de la politique militaire*, en el que emplea el término francés *loger*, que significa 'habitar' y 'alojar'. A partir de esto, empezó a tomar fuerza la necesidad de apoyar a los ejércitos en su dotación, movilidad y preparaciones para las batallas. Así mismo, las empresas apropiaron el concepto y lo usaron para responder en mejor medida a los requerimientos de sus clientes.

Contenido

- Ejercicio 3.1
- Ejercicio 3.2
- Ejercicio 3.3
- Ejercicio 3.4
- Ejercicio 3.5
- Ejercicio 3.6
- Ejercicio 3.7

Luego de ello, se habló de *logística táctica* y se dejó un poco de lado la intuición para definir un método más estructurado y científico. Esta evolución fue principalmente impulsada por ejércitos para sus operaciones durante las guerras de la primera parte del siglo XX, pero sumando un componente táctico en sus operaciones. Todo esto se encuentra registrado en obras como *Logística pura: la ciencia para la preparación* de Cyrus George Thorpe en 1945 y *Logistics in the national defense* de Henry E. Eccles en 1959.

Posteriormente, se incorporaron aspectos administrativos de planeación, control y seguimiento, que hicieron énfasis en el desarrollo de la gestión coordinada de las operaciones logísticas. Después, a mediados del siglo XX, el concepto evolucionó a la *logística integral*, en la cual se reconoce la cadena de suministro, la cual debe estar articulada a otras áreas y cuyas actividades deben operar de manera coordinada para responder en mejor medida a las necesidades de localización, abastecimiento, almacenamiento y distribución.

A finales del siglo XX, dada la perspectiva completa que se debe tener sobre la cadena de suministro y las distintas iniciativas por el cuidado del medioambiente, se incorporó el concepto de *logística inversa*, según el cual ya no solo resulta relevante responder a las necesidades del cliente de forma efectiva, sino también planear, operar y controlar las operaciones que permitan el regreso del material para su nuevo aprovechamiento y el uso de productos de menor impacto para el medioambiente.

Actualmente, la captura de información y su transferencia a lo largo de la cadena de suministro resulta un componente clave para mejorar la efectividad de las operaciones logísticas y la competitividad en el proceso. Por esto, el *machine learning* y la analítica de datos tienen un papel importante en el proceso. No obstante, la industria 4.0 también está impactando las actividades logísticas, razón

por la cual apropiar los conceptos, métodos y técnicas de la logística resulta importante para la competitividad profesional y empresarial.

La logística involucra diferentes actividades como la localización de instalaciones, la planificación del transporte y la realización de inventarios, compras y almacenamiento. La planificación de estas actividades requiere su coordinación y la identificación de unas medidas de desempeño, para generar diferentes beneficios económicos y sociales, y tener el menor impacto negativo en los actores externos y el medioambiente.

Para el diseño y la planificación de estas operaciones existen diversos métodos y continuamente se siguen desarrollando más. De hecho, la pandemia de COVID-19 marcó un gran desafío para personas, organizaciones y empresas en cuanto a la forma de continuar ejecutando sus actividades cotidianas y seguir respondiendo a las necesidades de sus clientes y proveedores bajo la implementación de medidas de bioseguridad en cada una de las etapas de sus procesos. Esto les implicó acelerar la incorporación de tecnología a sus procesos para reducir la interacción presencial y potencializar operaciones mediadas por plataformas tecnológicas.

Los casos que se describen en este capítulo permiten responder a los diferentes requerimientos de abastecimiento de recursos como alimentos y atención médica. No obstante, aunque el contexto es la pandemia, los métodos y las técnicas aquí ilustradas pueden replicarse a distintos entornos empresariales, no necesariamente afectados por la coyuntura.

Entre los diferentes métodos y modelos que se emplearán en este capítulo se encuentran el algoritmo de Floyd Warshall, el método ADD para localización, el modelo de selección de modo de transporte, los modelos de transbordo, la heurística de Schwarz, la heurística de Clarke

& Wright y la organización de bodegas con base en el índice COI. El capítulo está construido a partir de dos casos de estudio, sobre los cuales se implementan los diferentes métodos de planificación logística. Para ello, se exponen ejemplos y ejercicios que le permitirán al lector afianzar sus conceptos, aplicar modelos y proponer soluciones a problemas de tipo logístico en organizaciones.

Descripción caso de estudio 3.1

Debido al impacto que puede tener el aislamiento obligatorio en la economía de las personas, los mandatarios del país ven una oportunidad de apoyar a la población y, para ello, han decidido distribuir mercados solidarios a algunas familias seleccionadas. De los mercados, se conocen los lugares donde se piensa adquirirlos, los costos de compra y las características físicas de cada producto (tabla 3.1).

Tabla 3.1. Composición del mercado

Producto	Origen	Cantidad	Valor COP/und*	Tipo	Peso	Volumen
Atún	Japón	1	19 550	FOB	160 g	256 cm ³
Gaseosa	EE. UU.	2	25 220	CIF	1,1 kg	1 L
Bienestarina	Alemania	1	33 000	FOB	1 kg	1000 cm ³
Palomitas de maíz	México	1	18 700	CIF	100 g	1500 cm ³

* Precio de compra del producto con el tipo de negociación presentado.

En el caso del atún y la bienestarina, se paga un seguro de transporte correspondiente al 4 % del valor *free on board* (FOB) de la mercancía transportada. Los productos son importados desde diferentes países y se pueden recibir en los puertos de Buenaventura o Cartagena, y desde allí son enviados a los centros de distribución (CEDI) que se han habilitado.

De las líneas marítimas disponibles para traer los productos, se conocen los costos de transporte y las rutas ofrecidas; sin embargo, tienen diferentes capacidades para el transporte de la mercancía. Las características de cada una de las rutas se presentan en la tabla 3.2.

Tabla 3.2. Características de las líneas marítimas

Línea naviera	Puerto origen	Puerto destino	Costo transporte (USD/t)	Capacidad por viaje (t)*
Seabort	Tokio	Cartagena	117,18	8
Marsk	Tokio	Buenaventura-	105,46	10
Marsk	Hamburgo	Buenaventura	64,97	10
Marina Corp	Hamburgo	Cartagena	53,37	8
Hapagy	Bremen	Cartagena	58,01	7

*Los contenedores transportados son de la capacidad presentada.
 Por viaje solo se transporta un contenedor.

Los productos provenientes de EE. UU. y México son traídos en TEU³ y cada pedido corresponde a un contenedor de este tipo. Mientras tanto, el tamaño de envío de los productos provenientes de Alemania y Japón se encuentra en función de la línea marítima seleccionada.

La negociación para traer los productos para los mercados es intermodal, lo que implica que las unidades de carga de la línea marítima se mantienen hasta el arribo al CEDI, en ningún momento se separan. Para el transporte de mercancía dentro del país, la empresa ÑÑ Vehículos ha ganado la licitación y dispone de la facilidad para transportar la unidad de carga recibida por la línea marítima. Esta empresa puede transportar la mercancía entre cualquier par de ubicaciones, desde que tengan la disposición de vías, y cobraría COP 325/t/km transportado.

Adicionalmente, para la importación de los productos de los mercados solidarios, los gobernantes han negociado con los puertos y por cada contenedor que llegue en la línea marítima se pagarán los servicios portuarios como un contenedor general de 20' con carga normal en un proceso de importación. Asimismo, los aranceles de entrada de la mercancía al país se mantendrán en el 10 % del valor *cost insurance and*

³ Twenty-foot equivalent unit: unidad de medida utilizada en el transporte marítimo expresada en contenedores.

freight (CIF) de la mercancía y el impuesto al valor agregado (IVA) se incluirá como el 19 % del valor CIF con el arancel (FlyBox, s. f.).

Las líneas marítimas han identificado que la tasa para mantener los productos en el viaje es de 12 %/und/año, mientras la tasa de mantener los productos dentro del país, ya sea en el transporte terrestre o en los CEDI, es de 18%. Finalmente, cuando los productos arriban a los CEDI, se descargan para ensamblar los mercados. El costo de descargar un contenedor sin importar el tipo de producto es de COP 30 000 por contenedor.

Para recolectar la información de las familias que serán beneficiadas por estos auxilios, se consultaron bases de datos de las últimas votaciones presidenciales. Estos datos se sometieron a un análisis riguroso que permitió identificar los lugares y las cantidades de mercados que serán entregados a cada una de las familias (tabla 3.3). Por cada familia será entregado un único mercado.

Tabla 3.3. Ubicaciones de las familias a ser beneficiadas

	Ubicación	Familias	Conexiones*
A	Barranquilla	15 040	B, H
B	Cartagena	16 060	A, E, F, L
C	Tumaco	3250	J, Q, T, R
D	Puerto Carreño	22 040	I, H, R, T
E	Sincelejo	9520	L, K
F	Finca Ubo	32 020	P, E, I, K, M, Q
G	Florencia	29 400	O, Q, I
H	Arauca	22 970	L, D, A
I	Bogotá	30 900	L, D, O, J, N
J	Cali	29 370	C, I, G
K	Medellín	11 400	M, N, E, L
L	Tunja	19 910	K, A, I, H, B
M	Pereira	15 790	N, J
N	Manizales	6780	M, I, K
O	Mitú	8300	I, F, G
Q	Mocoa	13 500	C, G
T	Inírida	27 040	C, G, J, D

*Las conexiones representan los lugares a los cuales se puede viajar directamente desde cada ubicación.

El gobierno ha identificado algunos lugares que podrían funcionar como centros de operaciones para la distribución de los mercados solidarios. Estos lugares tienen un costo asociado para su adecuación, que consiste en el diseño de un CEDI para recibir los productos importados desde los puertos, el ensamblaje de los mercados y la carga de los vehículos para la distribución en las diferentes ciudades. Los lugares identificados como factibles para la ubicación de los CEDI se presentan en la tabla 3.4.

Tabla 3.4. Características de los centros de distribución (CEDI)

	Ubicación	Conexiones *	Costos de operación (COP)	Capacidad (t)	Capacidad (m ³)
A	Barranquilla	B, H	89 600 000	150	210
E	Sincelejo	L, K	157 000 000	120	270
F	Finca Ubo	P, E, I, K, M, Q	70 400 000	160	340
I	Bogotá	L, D, O, J, N	89 100 000	180	90
J	Cali	C, I, G	72 800 000	280	360
K	Medellín	M, N, E, L	98 400 000	190	170
M	Pereira	N, J	45 500 000	260	410
N	Manizales	M, I, K	73 400 000	320	270
T	Inírida	C, G, J, D	78 800 000	170	340
P	Santa Marta	A, B, E, K	71 000 000	100	440
R	Villavicencio	C, D, Q, T, O, I	61 700 000	250	410

Todos los transportes desde los CEDI a los lugares de entrega de los mercados se llevan a cabo por la empresa autorizada ÑÑ Vehículos. Con la información presentada anteriormente se requiere desarrollar la planeación de la cadena de abastecimiento y distribución de mercados para cada una de las ciudades. Para todos los cálculos se utiliza una TRM de COP 3970 y 365 días al año.

Ejercicio 3.1

Construcción de malla de distribución de ayudas (ruta más corta)

Solución ejercicio 3.1

Algoritmo de Floyd Warshall

Para el planteamiento inicial de la cadena de suministro es necesario determinar las distancias entre todos los puntos de la red. Con este fin se puede utilizar el algoritmo de Floyd Warshall, el cual busca determinar las rutas más cortas entre todo par de vértices de un grafo dirigido, donde cada arco tiene una ponderación que usualmente representa la distancia, costo o tiempo de recorrido (Hougardy, 2010). La figura 3.1 presenta el algoritmo de Floyd Warshall.

```

Floyd-Warshall ( $d =$  matriz distancias inicial,  $n =$  número de nodos)
{
  para  $k=1$  to  $n$  hacer
  para  $i=1$  to  $n$  hacer
  para  $j=1$  to  $n$  hacer

  Si (  $D^{(k-1)}[i,k] + D^{(k-1)}[k,j] < D^{(k-1)}[i,j]$  )

  { $D^{(k)}[i,j] = D^{(k-1)}[i,k] + D^{(k-1)}[k,j]$ ;
    pred[ $i,j$ ] =  $k$ ;}
  Sino  $D^{(k)}[i,j] = D^{(k-1)}[i,j]$ ;
}
retornar  $D^{(n)}[1, \dots, n, 1, \dots, n]$ ; #Matriz de distancias mínimas
retornar pred[ $i,j$ ]; #Matriz de recorridos
  
```

Figura 3.1. Algoritmo de Floyd Warshall.

Para la aplicación del algoritmo de Floyd Warshall, se requieren la matriz de distancias iniciales y la de recorridos. Las distancias iniciales se obtienen a través de Google Maps completando solo los recorridos directos. En la figura 3.2 se presenta una muestra inicial del desarrollo para completar la matriz de distancias de las conexiones de los nodos A y B.

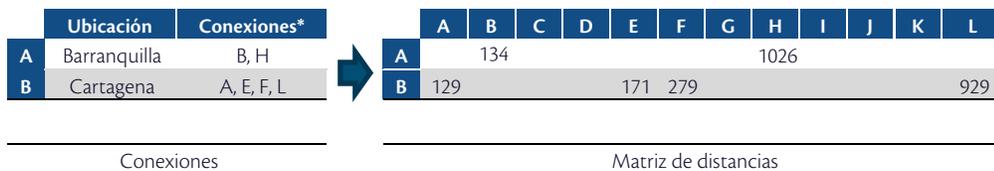


Figura 3.2. Construcción de matriz de distancias inicial.

Los datos de la matriz de distancias inicial se obtuvieron a través de Google Maps (s. f.), tan solo se completan los datos de las conexiones existentes (tabla 3.5). La matriz de distancias inicial se completa con valores muy grandes en los casos que no hay conexiones, representados por una *M* en la matriz.

Tabla 3.5. Matriz de distancias inicial

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	T
A	0	134	M	M	M	M	M	1026	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M
B	129	0	M	M	171	279	M	M	M	M	M	929	M	M	M	M	M	M	M
C	M	M	0	M	M	M	M	M	M	665	M	M	M	M	M	M	376	1200	1228
D	M	M	M	0	M	M	M	1329	969	M	M	M	M	M	M	M	M	852	262
E	M	M	M	M	0	M	M	M	M	M	471	774	M	M	M	M	M	M	M
F	M	M	M	M	112	0	M	M	802	M	416	M	627	M	M	434	1282	M	M
G	M	M	M	M	M	M	0	M	549	M	M	M	M	M	598	M	245	M	M
H	1025	M	M	1329	M	M	M	0	M	M	M	579	M	M	M	M	M	M	M
I	M	M	M	969	M	M	M	M	0	462	M	141	M	292	574	M	M	M	M
J	M	M	668	M	M	M	387	M	461	0	M	M	M	M	M	M	M	M	M
K	M	M	M	M	472	M	M	M	M	M	0	421	213	196	M	M	M	M	M
L	863	934	M	M	M	M	M	579	140	M	422	0	M	M	M	M	M	M	M
M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	209	M	M	0	53	M	M	M	M	M
N	M	M	M	M	M	M	M	M	292	M	198	M	53	0	M	M	M	M	M
O	M	M	M	M	M	1039	598	M	574	M	M	M	M	M	0	M	M	M	M
P	106	241	M	M	325	M	M	M	M	M	838	M	M	M	M	0	M	M	M
Q	M	M	418	M	M	M	245	M	M	M	M	M	M	M	M	M	0	M	M
R	M	M	1203	852	M	M	M	M	122	M	M	M	M	M	496	M	723	0	633
T	M	M	1228	262	M	M	888	M	M	956	M	M	M	M	M	M	M	M	0

Para la solución del algoritmo de Floyd Warshall, en la primera iteración se evalúan todas las opciones de hacer recorridos por medio del nodo A

seleccionando el recorrido si genera una mejor distancia. A continuación, se presenta una muestra de cálculos para algunos recorridos:

Evaluación distancia B-H:

$$d_{BH}^1 = \min\{d_{BH}^0; d_{BA}^0 + d_{AH}^0\}$$

$$d_{BH}^1 = \min\{M; 129 + 1026\}$$

$$d_{BH}^1 = \min\{M; 1155\}$$

$$d_{BH}^1 = 1155$$

Implica que se debe hacer el recorrido incluyendo el nodo A.

Evaluación distancia P-H:

$$d_{PH}^1 = \min\{d_{PH}^0; d_{PA}^0 + d_{AH}^0\}$$

$$d_{PH}^1 = \min\{M; 106 + 1026\}$$

$$d_{PH}^1 = \min\{M; 1132\}$$

$$d_{PH}^1 = 1132$$

Implica que se debe hacer el recorrido incluyendo el nodo A.

Evaluación distancia F-K:

$$d_{FK}^1 = \min\{d_{FK}^0; d_{FA}^0 + d_{AK}^0\}$$

$$d_{FK}^1 = \min\{416; M + M\}$$

$$d_{FK}^1 = \min\{416; 2M\}$$

$$d_{FK}^1 = 416$$

En este caso, se prefiere el recorrido directo desde F hasta K en lugar de pasar por el nodo A.

Evaluación distancia L-B:

$$d_{LB}^1 = \min\{d_{LB}^0 ; d_{LA}^0 + d_{AB}^0\}$$

$$d_{LB}^1 = \min\{934 ; 863 + 134\}$$

$$d_{LB}^1 = \min\{934; 997\}$$

$$d_{LB}^1 = 934$$

Se prefiere el recorrido directo de L hasta B en vez de hacer el recorrido L-A-B.

Luego de hacer todas las evaluaciones, se obtiene una nueva matriz de distancias, que se presenta en la tabla 3.6. Se resaltan en color verde las celdas que cambian, mientras las distancias resaltadas en azul corresponden a la base de evaluación de recorridos (incluyendo A).

Tabla 3.6. Matriz de distancias iteración A

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	T
A	0	134	M	M	M	M	M	1026	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M
B	129	0	M	M	171	279	M	1155	M	M	M	929	M	M	M	M	M	M	M
C	M	M	0	M	M	M	M	M	M	665	M	M	M	M	M	M	376	1200	1228
D	M	M	M	0	M	M	M	1329	969	M	M	M	M	M	M	M	M	852	262
E	M	M	M	M	0	M	M	M	M	M	471	774	M	M	M	M	M	M	M
F	M	M	M	M	112	0	M	M	802	M	416	M	627	M	M	434	1282	M	M
G	M	M	M	M	M	M	0	M	549	M	M	M	M	M	598	M	245	M	M
H	1025	1159	M	1329	M	M	M	0	M	M	M	579	M	M	M	M	M	M	M
I	M	M	M	969	M	M	M	M	0	462	M	141	M	292	574	M	M	M	M
J	M	M	668	M	M	M	387	M	461	0	M	M	M	M	M	M	M	M	M
K	M	M	M	M	472	M	M	M	M	M	0	421	213	196	M	M	M	M	M
L	863	934	M	M	M	M	M	579	140	M	422	0	M	M	M	M	M	M	M
M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	209	M	M	0	53	M	M	M	M	M
N	M	M	M	M	M	M	M	M	292	M	198	M	53	0	M	M	M	M	M
O	M	M	M	M	M	1039	598	M	574	M	M	M	M	M	0	M	M	M	M
P	106	241	M	M	325	M	M	1132	M	M	838	M	M	M	M	0	M	M	M
Q	M	M	418	M	M	M	245	M	M	M	M	M	M	M	M	M	0	M	M
R	M	M	1203	852	M	M	M	M	122	M	M	M	M	M	496	M	723	0	633
T	M	M	1228	262	M	M	888	M	M	956	M	M	M	M	M	M	M	M	0

De igual manera, la iteración B se desarrolla al evaluar los recorridos que pueden generar una mejor distancia por incluir el nodo B. La aplicación en algunos de estos recorridos se presenta a continuación:

Evaluación distancia L-E:

$$d_{LE}^2 = \min\{d_{LE}^1 ; d_{LB}^1 + d_{BE}^1\}$$

$$d_{LE}^2 = \min\{M ; 934 + 171\}$$

$$d_{LE}^2 = \min\{M ; 1105\}$$

$$d_{LE}^2 = 1105$$

Implica que se debe hacer el recorrido incluyendo el nodo B, lo que genera un recorrido L-B-E.

Evaluación distancia K-N:

$$d_{KN}^2 = \min\{d_{KN}^1 ; d_{KB}^1 + d_{BN}^1\}$$

$$d_{KN}^2 = \min\{196 ; M + M\}$$

$$d_{KN}^2 = \min\{196 ; 2M\}$$

$$d_{KN}^2 = 196$$

Implica que no es adecuado incluir el nodo B en el recorrido desde K hasta N.

Finalmente, después de desarrollar completa la iteración B, se obtiene la matriz de distancias de la tabla 3.7.

Tabla 3.7. Matriz de distancias iteración B

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	T
A	-	134	M	M	305	413	M	1026	M	M	M	1063	M	M	M	M	M	M	M
B	129	-	M	M	171	279	M	1155	M	M	M	929	M	M	M	M	M	M	M
C	M	M	-	M	M	M	M	M	665	M	M	M	M	M	M	M	376	1200	1228
D	M	M	M	-	M	M	M	1329	969	M	M	M	M	M	M	M	M	852	262
E	M	M	M	M	-	M	M	M	M	471	774	M	M	M	M	M	M	M	M
F	M	M	M	M	112	-	M	M	802	M	416	M	627	M	M	434	1282	M	M
G	M	M	M	M	M	M	-	M	549	M	M	M	M	M	598	M	245	M	M
H	1025	1159	M	1329	1330	1438	M	-	M	M	M	579	M	M	M	M	M	M	M
I	M	M	M	969	M	M	M	M	-	462	M	141	M	292	574	M	M	M	M
J	M	M	668	M	M	M	387	M	461	-	M	M	M	M	M	M	M	M	M
K	M	M	M	M	472	M	M	M	M	M	-	421	213	196	M	M	M	M	M
L	863	934	M	M	1105	1213	M	579	140	M	422	-	M	M	M	M	M	M	M
M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	209	M	M	-	53	M	M	M	M	M
N	M	M	M	M	M	M	M	M	292	M	198	M	53	-	M	M	M	M	M
O	M	M	M	M	M	1039	598	M	574	M	M	M	M	M	-	M	M	M	M
P	106	240	M	M	325	519	M	1132	M	M	838	1169	M	M	M	-	M	M	M
Q	M	M	418	M	M	M	245	M	M	M	M	M	M	M	M	M	-	M	M
R	M	M	1203	852	M	M	M	M	122	M	M	M	M	M	496	M	723	-	633
T	M	M	1228	262	M	M	888	M	M	956	M	M	M	M	M	M	M	M	-

Al desarrollar todas las iteraciones del algoritmo de Floyd Warshall y evaluar cada nodo desde el A hasta el T, se obtiene la matriz final de distancias mínimas para la red, que se presenta en la tabla 3.8.

Tabla 3.8. Matriz final de distancias mínimas (iteración T)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	T
A	-	134	1866	2172	305	413	1585	1026	1203	1198	776	1063	989	972	1777	847	1695	3024	2434
B	129	-	1732	2038	171	279	1451	1155	1069	1064	642	929	855	838	1643	713	1561	2890	2300
C	2130	2201	-	1490	2088	2258	621	1846	1126	665	1616	1267	1471	1418	1219	2692	376	1200	1228
D	1973	2044	1490	-	1931	2323	1150	1329	969	1218	1459	1110	1314	1261	1348	2757	1395	852	262
E	1637	1708	1561	1883	-	1987	1280	1353	914	893	471	774	684	667	1488	2421	1525	2735	2145
F	540	674	1504	1771	112	-	1223	1416	802	836	416	837	627	612	1376	434	1282	2623	2033
G	1553	1624	663	1518	1511	1637	-	1269	549	1011	1039	690	894	841	598	2071	245	1863	1780
H	1025	1159	1849	1329	1330	1438	1568	-	719	1181	1001	579	1064	1011	1293	1872	1813	2181	1591
I	1004	1075	1130	969	962	1354	849	720	-	462	490	141	345	292	574	1788	1094	1821	1231
J	1465	1536	668	1430	1423	1815	387	1181	461	-	951	602	806	753	985	2249	632	1868	1692
K	1284	1355	1090	1457	472	1634	809	1000	488	422	-	421	213	196	1062	2068	1054	2290	1719
L	863	934	1270	1109	894	1213	989	579	140	602	422	-	485	432	714	1647	1234	1961	1371
M	1349	1420	877	1314	723	1699	596	1065	345	209	251	486	-	53	919	2133	841	2077	1576
N	1296	1367	930	1261	670	1646	649	1012	292	262	198	433	53	-	866	2080	894	2113	1523
O	1578	1649	1261	1543	1151	1039	598	1294	574	1036	1064	715	919	866	-	1473	843	2395	1805
P	106	240	1886	2208	325	519	1605	1132	1239	1218	796	1099	1009	992	1813	-	1801	3060	2470
Q	1798	1869	418	1763	1756	1882	245	1514	794	1083	1284	935	1139	1086	843	2316	-	1618	1646
R	1126	1197	1141	852	1084	1476	968	842	122	584	612	263	467	414	496	1910	723	-	633
T	2235	2306	1228	262	2193	2525	888	1591	1231	956	1721	1372	1576	1523	1486	2959	1133	1114	-

Ejercicio de aplicación 3.1

Con un nuevo grupo de ciudades y un conjunto de conexiones permitidas, se requiere identificar todas las distancias entre todas las ciudades. Identifique la matriz final del algoritmo de Floyd Warshall y la distancia mínima para viajar desde F hasta A.

Tabla 3.9. Matriz de conexiones ([origen-destino]: distancia)

Ciudad	Conexiones
A	(A-B : 560), (A-C : 246), (A-D : 759)
B	(B-A : 189), (B-D : 287), (B-E : 764)
C	(C-A : 566), (C-D : 394), (C-G : 484), (C-H : 100)
D	(D-A : 393), (D-B : 956), (D-C : 562), (D-G : 626)
E	(E-B : 122), (E-D : 422), (E-F : 520)
F	(F-D : 320), (F-E : 783), (F-G : 250), (F-H : 958)
G	(G-D : 187), (G-F : 413), (G-H : 199)
H	(H-C : 954), (H-F : 361)

Ejercicio 3.2

Determinación de puntos de distribución de mercados

Solución ejercicio 3.2

Planeación de localización

(método ADD sin restricciones)

Posteriormente, tras identificar las distancias entre cada uno de los puntos, se procede a determinar los centros de distribución (CEDI) encargados de recibir todos los productos, consolidar los mercados y distribuirlos a cada una de las ciudades. Para la aplicación del método de localización ADD, se requiere construir la matriz $w_j r_{ij} d_{ij}$, donde:

w_j = demanda en toneladas de mercados requeridos por la ciudad j (t)

d_{ij} = distancia en km desde la ubicación i hasta la ubicación j (km)

r_{ij} = costo de transporte de demanda en toneladas de mercados requeridos por la ciudad j $\left(\frac{\$}{\text{km} * \text{t}}\right)$

El algoritmo ADD evalúa los costos de localización y distribución desde cada posible ubicación e iterativamente va agregando nuevas posibles ubicaciones hasta llegar a un costo mínimo. Los pasos del algoritmo se presentan en la figura 3.3.

1. Determinar la matriz $w_j r_{ij} d_{ij}$ (Costo de enviar desde i hasta j)
 2. Determinar $\sum_{j \in J} w_j r_{ij} d_{ij}$ (Costo distribución desde i)
 3. Incluir el costo de apertura de la instalación i f_i
 4. Determinar el costo total de ubicarse en el punto i $\sum_{j \in J} (w_j r_{ij} d_{ij}) + f_i$
 5. Seleccionar la ubicación a abrir acorde a la función objetivo (Min -> menor o Max -> mayor)
- ITERACIONES
6. Actualización $w_j r_{ij} d_{ij}$. Seleccionando el menor costo para abastecer al punto j desde los puntos que se encuentren abiertos.
 7. Actualizar costo de apertura teniendo en cuenta la cantidad total de instalaciones abiertas
 8. Actualizar el costo total $\sum_{i \in I(\text{Abiertos})} \sum_{j \in J} (w_j r_{ij} d_{ij}) + f_i$
 9. Si el costo total de la iteración es mayor al costo total de la actual iteración.
- Parar:** quedarse con la solución de la iteración anterior.
- Si es menor continuar retornar al paso 6, para agregar un nuevo punto de localización.

Figura 3.3. Algoritmo ADD de localización.

El vector de demanda w_j se obtiene al tomar en cuenta que cada familia requiere un mercado y conociendo el peso y la cantidad de productos que requiere cada mercado (tabla 3.3). Inicialmente, se determina el peso de un solo mercado en toneladas (tabla 3.10).

Tabla 3.10. Determinación peso de un mercado

Producto	Cantidad	Peso	Peso (t)
Atún	1	160 g	0,00016
Gaseosa	2	1,1 kg	0,0022
Bienestarina	1	1 kg	0,001
Palomitas de maíz	1	100 g	0,0001
Peso mercado			0,00346

El peso del mercado en toneladas se multiplica por la cantidad requerida de estos en cada ciudad, teniendo en cuenta que cada familia se abastece con un solo mercado (tabla 3.3). El cálculo para el caso de Sincelejo se presenta a continuación y el vector de demandas obtenido se muestra en la tabla 3.11.

$$\begin{aligned}
 \text{Demanda (t)} &= \text{Demanda (mercados)} \\
 &\times \text{Peso} \left(\frac{t}{\text{mercado}} \right)
 \end{aligned}$$

$$\text{Demanda (t)} = 9520 \times 0,00346 = 32,93 \text{ t}$$

Tabla 3.11A. Demanda en toneladas de cada ciudad

	A	B	C	D	E	F	G	H
	Barranquilla	Cartagena	Tumaco	Puerto Carreño	Sincelejo	Finca Ubo	Florencia	Arauca
Demanda (mercados)	15040	16060	3250	22040	9520	32020	29400	22970
Demanda (t)	52,03	55,57	11,24	76,25	32,93	110,78	101,72	79,47

Tabla 3.11B. Demanda en toneladas de cada ciudad

	I	J	K	L	M	N	O	Q	T
	Bogotá	Cali	Medellín	Tunja	Pereira	Manizales	Mitú	Mocoa	P. Inírida
Demanda (mercados)	30900	29370	11400	19910	15790	6780	8300	13500	27040
Demanda (t)	106,91	101,62	39,44	68,88	54,63	23,458	28,72	46,71	93,55

En este caso, r_{ij} es una constante correspondiente al cobro de la empresa $\tilde{N}\tilde{N}$ Vehículos, con un valor de COP 325/t-km, y los valores de las distancias son obtenidos de la matriz de Floyd Warshall (tabla 3.8). Algunos de los cálculos para obtener la matriz $w_j r_{ij} d_{ij}$ se presentan a continuación, ejemplificados para el costo de envío de la mercancía desde Finca Ubo hasta Sincelejo. Adicionalmente, la matriz obtenida para toda la mezcla de orígenes y destinos se muestra en la tabla 3.12.

$$CR_{ij} = w_j r_{ij} d_{ij}$$

$$CR_{FE} = w_E r_{FE} d_{FE}$$

$$CR_{FE} = 32,93 t \times 325 \frac{\$}{km * t} \times 112 km$$

$$CR_{FE} = COP 1 198 652$$

Tabla 3.12A. Costos de distribución (COP)

		Lugares a atender							
		A	B	C	D	E	F	G	H
Ubicaciones posibles	A	0	2 419 969	6 819 530	53 830 805	3 265 098	14 870 680	52 400 576	26 501 339
	E	27 685 730	30 845 575	5 704 870	46 668 234	0	71 544 896	42 317 184	34 947 672
	F	9 132 739	12 172 083	5 496 556	43 892 429	1 198 987	0	40 432 747	36 574 947
	I	16 980 130	19 413 930	4 129 726	24 015 677	10 298 441	48 752 787	28 068 195	18 597 431
	J	24 776 783	27 739 346	2 441 290	35 441 091	15 233 557	65 351 779	12 794 336	30 504 952
	K	21 715 624	24 470 582	3 983 541	36 110 259	5 052 873	58 834 605	26 745 783	25 829 765
	M	22 814 936	25 644 447	3 205 106	32 566 150	7 739 889	61 175 027	19 703 939	27 508 700
	N	21 918 574	24 687 295	3 398 801	31 252 599	7 172 511	59 266 683	21 456 135	26 139 722
	T	37 799 393	41 645 138	4 487 880	6 493 403	23 476 591	90 916 387	29 357 546	41 095 156
	P	1 792 723	4 334 273	6 892 623	54 723 028	3 479 203	18 687 368	53 061 782	29 239 294
	R	19 043 452	21 617 186	4 169 927	21 115 951	11 604 480	53 145 579	32 002 370	21 748 662

Tabla 3.12B. Costos de distribución (COP) (continuación)

		Lugares a atender							
		I	J	K	L	M	N	O	Q
A	41 800 701	39 565 825	9 947 777	23 799 289	17 560 541	7 410 635	16 585 363	25 731 371	74 009 372
E	31 758 804	29 492 723	6 037 890	17 328 927	12 145 005	5 085 281	13 888 025	23 150 644	65 221 900
F	27 867 134	27 610 208	5 332 829	18 739 421	11 132 921	4 665 955	12 842 690	19 461 722	61 816 374
I	0	15 258 273	6 281 457	3 156 820	6 125 770	2 226 240	5 357 343	16 607 741	37 430 377
J	16 018 390	0	12 191 154	13 478 055	14 311 219	5 740 955	9 193 350	9 594 234	51 447 764
K	16 956 560	13 937 210	0	9 425 683	3 781 997	1 494 326	9 912 018	16 000 511	52 268 739
M	11 987 732	6 902 552	3 217 644	10 880 954	0	404 078	8 577 349	12 767 011	47 920 612
N	10 146 139	8 652 960	2 538 221	9 694 348	941 060	0	8 082 681	13 571 591	46 309 069
T	42 773 619	31 573 396	22 062 015	30 717 427	27 983 227	11 611 520	13 869 358	17 199 790	0
P	43 051 595	40 226 356	10 204 163	24 605 286	17 915 658	7 563 117	16 921 364	27 340 531	75 104 006
R	4 239 140	19 287 514	7 845 412	5 888 253	8 291 984	3 156 382	4 629 342	10 975 682	19 247 302

Con la construcción de la matriz $w_j r_{ij} d_{ij}$ se procede a determinar los costos totales por cada posible ubicación, correspondientes a los costos de distribución y los costos de operación en el lugar seleccionado:

$$CT_i = \sum_{j \in J} w_j r_{ij} d_{ij} + f_i$$

Donde f_i corresponde al monto de ubicarse en la posición i . Este valor se obtuvo en el ejercicio presentado en la tabla 3.4. Adicionalmente, $\sum_{j \in J} w_j r_{ij} d_{ij}$ se asocia al costo de distribuir los productos a todos los clientes j desde la ubicación i (sumar todos los valores por fila). Los costos obtenidos para esta primera iteración del método ADD se muestran en la tabla 3.13.

Tabla 3.13. Costos de abastecimiento

	Costo de distribución $\sum_{j \in J} w_j r_{ij} d_{ij}$	Costo de apertura f_i	Costo total CT_i
A	416 518 871	80 600 000	497 118 871
E	463 823 358	157 000 000	620 823 358
F	338 369 742	70 400 000	408 769 742
I	262 700 337	89 100 000	351 800 337
J	346 258 255	72 800 000	419 058 255
K	326 520 075	98 400 000	424 920 075
M	303 016 125	45 500 000	348 516 125
N	295 228 389	73 400 000	368 628 389
T	473 061 846	78 800 000	551 861 846
P	435 142 367	71 000 000	506 142 367
R	268 008 618	61 700 000	329 708 618

Con los resultados obtenidos de la tabla 3.13, se procede a identificar la ubicación con un menor costo total, que es la ciudad de Villavicencio (R) con un valor total de COP 329 708 618. De esta manera, para la siguiente iteración del método ADD, se evalúan los costos de abrir una ubicación adicional, teniendo en cuenta que ya se abrió la ubicación R. La nueva matriz de distribución ($w_j r_{ij} d_{ij}$) se presenta en la tabla 3.14.

Tabla 3.14A. Costos de distribución segunda iteración del método ADD (COP)

		Lugares a atender							
		A	B	C	D	E	F	G	H
Ubicaciones	RA	0	2 419 969	4 169 927	21 115 951	3 265 098	14 870 680	32 002 370	21 748 662
	RE	19 043 452	21 617 186	4 169 927	21 115 951	0	53 145 579	32 002 370	21 748 662
	RF	9 132 739	12 172 083	4 169 927	21 115 951	1 198 987	0	32 002 370	21 748 662
	RI	16 980 130	19 413 930	4 129 726	21 115 951	10 298 441	48 752 787	28 068 195	18 597 431
	RJ	19 043 452	21 617 186	2 441 290	21 115 951	11 604 480	53 145 579	12 794 336	21 748 662
	RK	19 043 452	21 617 186	3 983 541	21 115 951	5 052 873	53 145 579	26 745 783	21 748 662
	RM	19 043 452	21 617 186	3 205 106	21 115 951	7 739 889	53 145 579	19 703 939	21 748 662
	RN	19 043 452	21 617 186	3 398 801	21 115 951	7 172 511	53 145 579	21 456 135	21 748 662
	RT	19 043 452	21 617 186	4 169 927	6 493 403	11 604 480	53 145 579	29 357 546	21 748 662
	RP	1 792 723	4 334 273	4 169 927	21 115 951	3 479 203	18 687 368	32 002 370	21 748 662

Tabla 3.14B. Costos de distribución segunda iteración del método ADD (COP) (continuación)

	I	J	K	L	M	N	O	Q	T
RA	4 239 140	19 287 514	7 845 412	5 888 253	8 291 984	3 156 382	4 629 342	10 975 682	19 247 302
RE	4 239 140	19 287 514	6 037 890	5 888 253	8 291 984	3 156 382	4 629 342	10 975 682	19 247 302
RF	4 239 140	19 287 514	5 332 829	5 888 253	8 291 984	3 156 382	4 629 342	10 975 682	19 247 302
RI	0	15 258 273	6 281 457	3 156 820	6 125 770	2 226 240	4 629 342	10 975 682	19 247 302
RJ	4 239 140	0	7 845 412	5 888 253	8 291 984	3 156 382	4 629 342	9 594 234	19 247 302
RK	4 239 140	13 937 210	0	5 888 253	3 781 997	1 494 326	4 629 342	10 975 682	19 247 302
RM	4 239 140	6 902 552	3 217 644	5 888 253	0	404 078	4 629 342	10 975 682	19 247 302
RN	4 239 140	8 652 960	2 538 221	5 888 253	941 060	0	4 629 342	10 975 682	19 247 302
RT	4 239 140	19 287 514	7 845 412	5 888 253	8 291 984	3 156 382	4 629 342	10 975 682	0
RP	4 239 140	19 287 514	7 845 412	5 888 253	8 291 984	3 156 382	4 629 342	10 975 682	19 247 302

Para determinar los costos de distribución, se identifica el menor costo desde los puntos abiertos mediante los siguientes cálculos :

$$\text{Costo distribución}_{ij} = \min_{i \in \text{Abiertos}} \{w_j r_{ij} d_{ij}\}$$

El caso del abastecimiento de Cartagena (B), si están abiertas las ubicaciones Villavicencio (R) y Barranquilla (A), tendría la siguiente estructura, correspondiente al valor de la celda [RA, B] en la matriz de la tabla 3.14B:

$$\text{Costo distribución}_{RA-B} = \min_{i \in \text{Abiertos}} \{w_B r_{iB} d_{iB}\}$$

$$\text{Costo distribución}_{RA-B} = \min_{i \in \text{Abiertos}} \{w_B r_{RB} d_{RB} ; w_B r_{AB} d_{AB}\}$$

Los valores de $w_j r_{ij} d_{ij}$ son tomados de la matriz inicial de costos de distribución (tabla 3.12):

$$\text{Costo distribución}_{RA-B} = \min \{ \text{COP } 21\,617\,186 ; \text{COP } 2\,419\,969 \}$$

$$\text{Costo distribución}_{RA-B} = \text{COP } 2\,419\,969$$

De la misma forma, se ejemplifican los valores obtenidos en la tabla 3.14B de costos de distribución a M desde RN, y a A desde RJ, con base en los valores obtenidos de la tabla 3.12:

$$\text{Costo distribución}_{RN-M} = \min_{i \in \text{Abiertos}} \{w_M r_{RM} d_{RM} ; w_M r_{NM} d_{NM}\}$$

$$\text{Costo distribución}_{RN-M} = \min \{ \text{COP } 8\,291\,984 ; \text{COP } 941\,060 \}$$

$$\text{Costo distribución}_{RN-M} = \text{COP } 941\,060$$

$$\text{Costo distribución}_{RJ-A} = \min_{i \in \text{Abiertos}} \{w_A r_{RA} d_{RA} ; w_J r_{JA} d_{JA}\}$$

$$\text{Costo distribución}_{RJ-A} = \min \{ \text{COP } 19\,043\,452 ; \text{COP } 24\,776\,783 \}$$

$$\text{Costo distribución}_{RJ-A} = \text{COP } 19\,043\,452$$

Al recalcular los costos de localización para la segunda iteración del método ADD, se obtienen los costos totales de la tabla 3.15.

Tabla 3.15. Costos de abastecimiento de dos localizaciones (COP)

	Costo de distribución $\sum_{j \in J} w_j r_{ij} d_{ij}$	Costo de apertura $\sum_{i \in I} f_i$	Costo total CT_i
RA	183 153 668	142 300 000	325 453 668
RE	254 596 617	218 700 000	473 296 617
RF	182 589 147	132 100 000	314 689 147
RI	235 257 477	150 800 000	386 057 477
RJ	226 402 984	134 500 000	360 902 984
RK	236 646 280	160 100 000	396 746 280
RM	222 823 757	107 200 000	330 023 757
RN	225 810 238	135 100 000	360 910 238
RT	231 493 944	140 500 000	371 993 944
RP	190 891 488	132 700 000	323 591 488

En cada uno de los casos, los costos de apertura corresponden a los costos de dos ubicaciones y se asocian a los costos de operación de la tabla 3.4. En el caso de RN, el costo corresponde al costo de operar R (COP 61 700 000) y N (COP 73 400 000) con un valor de COP 135 100 000.

Para la selección del mejor conjunto de ubicaciones, se elige la opción de menores costos totales, que en este caso corresponde a las ubicaciones R y F con un costo total de COP 314 689 147. El valor de abrir RF es menor al costo de abrir R, que es de COP 329 708 618 (primera iteración). Por lo tanto, se prefiere abrir las dos ubicaciones y desarrollar la siguiente iteración del método ADD. La tabla 3.16 presenta la primera parte de la tercera iteración del método, en la cual se toma como base que ya se han abierto los puntos RF y se evalúa abrir un tercer punto.

Tabla 3.16A. Costos de distribución tercera iteración del método ADD (COP)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
RFA	0	2 419 969	4 169 927	21 115 951	1 198 987	0	32 002 370	21 748 662	4 239 140
RFE	9 132 739	12 172 083	4 169 927	21 115 951	0	0	32 002 370	21 748 662	4 239 140
RFI	9 132 739	12 172 083	4 129 726	21 115 951	1 198 987	0	28 068 195	18 597 431	0

Tabla 3.16B. Costos de distribución tercera iteración del método ADD (COP) (continuación)

	J	K	L	M	N	O	Q	T
RFA	19 287 514	5 332 829	5 888 253	8 291 984	3 156 382	4 629 342	10 975 682	19 247 302
RFE	19 287 514	5 332 829	5 888 253	8 291 984	3 156 382	4 629 342	10 975 682	19 247 302
RFI	15 258 273	5 332 829	3 156 820	6 125 770	2 226 240	4 629 342	10 975 682	19 247 302

Para determinar los costos de la matriz de la tabla 3.16B, se evalúan los costos de distribución de la primera iteración (tabla 3.13). Tras seleccionar el menor valor de las iteraciones abiertas, a continuación, se presentan los cálculos para el abastecimiento del punto M si están habilitados los puntos R, F y E:

$$Costo\ distribución_{RFE-M} = \min_{i \in \text{Abiertos}} \{w_M r_{RM} d_{RM}; w_M r_{FM} d_{FM}; w_M r_{EM} d_{EM}\}$$

$$\text{Costo distribución}_{R\text{-}A} = \min \{ \text{COP } 8\,291\,984; \text{COP } 11\,132\,921; \text{COP } 12\,145\,005 \}$$

$$\text{Costo distribución}_{R\text{-}A} = \text{COP } 8\,291\,894$$

El resultado para la tercera iteración del método ADD se presenta en la tabla 3.17.

Tabla 3.17. Costos de abastecimiento de tres localizaciones (COP)

		Costo de distribución $\sum_{i \in I} w_j r_{ij} d_{ij}$	Costo de apertura $\sum_{i \in I} f_i$	Costo total CT_i
Ubicaciones posibles	RFA	163 704 294	212 700 000	376 404 294
	RFE	181 390 160	289 100 000	470 490 160
	RFI	161 367 369	221 200 000	382 567 369
	RFJ	140 983 513	204 900 000	345 883 513
	RFK	160 290 998	230 500 000	390 790 998
	RFM	143 781 460	177 600 000	321 381 460
	RFN	147 335 319	205 500 000	352 835 319
	RFT	146 074 473	210 900 000	356 974 473
	RFP	167 411 321	203 100 000	370 511 321

En este caso, el costo de apertura de tres ubicaciones es de COP 321 381 460, que corresponde a la apertura de los puntos R, F y M. Sin embargo, el costo es mucho mayor que el de abrir dos ubicaciones; por lo tanto, la solución es abrir dos localizaciones R y F.

Para identificar la asignación de los puntos a cada una de las localizaciones abiertas, se determina el menor costo de abastecimiento a cada uno de los clientes con las ubicaciones abiertas (tabla 3.18).

Tabla 3.18A. Asignación de distribución a puntos habilitados (COP)

	Lugares a atender							
	A	B	C	D	E	F	G	H
F	9 132 739	12 172 083	5 496 556	43 892 429	1 198 987	0	40 432 747	36 574 947
R	19 043 452	21 617 186	4 169 927	21 115 951	11 604 480	53 145 579	32 002 370	21 748 662
Asigna	F	F	R	R	F	F	R	R

Tabla 3.18B. Asignación de distribución a puntos habilitados (COP) (continuación)

	Lugares a atender								
	I	J	K	L	M	N	O	Q	T
F	27 867 13	27 610 20	5 332 829	18 739 42	11 132 92	4 665 955	12 842 69	19 461 722	61 816 37
R	4 239 140	19 287 51	7 845 412	5 888 253	8 291 984	3 156 382	4 629 342	10 975 682	19 247 30
	R	R	F	R	R	R	R	R	R

De esta forma, desde la Finca Ubo (F) se deben atender las ciudades A, B, E, F, K; mientras tanto desde Villavicencio (R) se deben atender las ciudades C, D, G, H, I, J, L, M, N, O, Q, T.

Solución ejercicio 3.2 **Planeación de localización** **(método ADD con restricciones)**

La planeación de la localización desarrollada en el ejercicio anterior no tuvo en cuenta las restricciones de capacidad, volumen y peso de cada centro de distribución. A continuación, se amplía el método teniendo en cuenta estas restricciones. Inicialmente, se determina el volumen de los mercados que se deben entregar en cada una de las ciudades. De nuevo, utilicemos el caso de Sincelejo (tablas 3.19 y 3.20).

Tabla 3.19. Determinación de volumen de un mercado

Producto	Cantidad	Volumen	Volumen (m ³)
Atún	1	256 cm ³	0,000256
Gaseosa	2	1 L	0,001
Bienestarina	1	1000 cm ³	0,001
Palomitas de maíz	1	1500 cm ³	0,0015
Peso mercado			0,004756

$$\begin{aligned}
 \text{Demanda (m}^3\text{)} &= \text{Demanda (mercados)} \\
 &\times \text{Volumen} \left(\frac{\text{m}^3}{\text{mercado}} \right)
 \end{aligned}$$

$$\text{Demanda (t)} = 9520 \times 0,004756 = 45,27 \text{ m}^3$$

Tabla 3.20A. Demanda en m³ de cada ciudad

	A	B	C	D	E	F	G	H
	Barranquilla	Cartagena	Tumaco	Puerto Carreño	Sincelejo	Finca Ubo	Florencia	Arauca
Demanda (mercados)	15 040	16 060	3250	22 040	9520	32 020	29 400	22 970
Demanda (t)	52,03	55,57	11,24	76,25	32,93	110,78	101,72	79,47
Volumen (m ³)	71,53	76,38	15,45	104,82	45,27	152,28	139,82	109,24

Tabla 3.20B. Demanda en m³ de cada ciudad (continuación)

	I	J	K	L	M	N	O	Q	T
	Bogotá	Cali	Medellín	Tunja	Pereira	Manizales	Mitú	Mocoa	Inírida
Demanda (mercados)	30 900	29 370	11 400	19 910	15 790	6780	8300	13 500	27 040
Demanda (t)	106,91	101,62	39,44	68,88	54,63	23,458	28,72	46,71	93,55
Volumen (m ³)	146,96	139,68	54,21	94,69	75,09	32,24	39,47	64,21	128,60

Con la solución obtenida, se evalúa la capacidad en peso y volumen. En las tablas 3.21 y 3.22 se identifica la demanda en peso y volumen con la asignación obtenida del método ADD (tabla 3.18).

Tabla 3.21. Verificación de la capacidad asignada al punto F

	Peso	Volumen
A	52,03	71,53
B	55,57	76,38
E	32,93	45,27
F	110,78	152,28
K	39,44	54,21
Total	290,75	399,67

Tabla 3.22. Verificación de la capacidad asignada al punto R

	Peso	Volumen
C	11,24	15,45
D	76,25	104,82
G	101,72	139,82
H	79,47	109,24
I	106,91	146,96
J	101,62	139,68
L	68,88	94,69
M	54,63	75,09
N	23,458	32,24
O	28,72	39,47
Q	46,71	64,21
T	93,55	128,6
Total	793,16	1090,27

La capacidad del punto F es de 160 t y 340 m³, y la del punto R es de 250 t y 410 m³, para un total de 410 t y 750 m³. Por otro lado, la demanda total es de 1083,9 t y 1489,9 m³; por lo tanto, la solución no satisface las capacidades tanto en volumen como en peso. Debido a esto, se debe seguir iterando el método ADD hasta lograr que la capacidad total de los puntos abiertos supere la capacidad requerida. La tercera iteración presentada en la tabla 3.16 indica que se deben abrir las ubicaciones R, F y M. La capacidad obtenida con estos tres puntos abiertos sería la que se presenta en la tabla 3.23.

Tabla 3.23. Capacidad con tres ubicaciones abiertas

	Capacidad (t)	Capacidad (m ³)
F	160	340
M	260	410
R	250	410
Total	670	1160

De igual manera, con la apertura de tres ubicaciones la capacidad es insuficiente. Por ello, se debe continuar iterando en el método ADD para

abrir cuatro ubicaciones. Los resultados de la cuarta iteración se muestran en la tabla 3.24.

Tabla 3.24. Costos de abastecimiento de cuatro localizaciones, cuarta iteración con método ADD (COP)

		Costo de distribución $\sum_{j \in J} w_j r_{ij} d_{ij}$	Costo de apertura $\sum_{i \in I} f_i$	Costo total CT_i
Ubicaciones posibles	RFMA	124 896 607	258 200 000	383 096 607
	RFME	142 582 473	334 600 000	477 182 473
	RFMI	133 659 656	266 700 000	400 359 656
	RFMJ	127 824 040	250 400 000	378 224 040
	RFMK	140 563 816	276 000 000	416 563 816
	RFMN	142 697 959	251 000 000	393 697 959
	RFMT	109 911 610	256 400 000	366 311 610
	RFMP	128 603 634	248 600 000	377 203 634

En este caso, el menor costo de las cuatro ubicaciones corresponde a COP366 311 610, abriendo las ubicaciones R, F, M y T. Sin embargo, la capacidad de estas cuatro ubicaciones es de 840 t y 1500 m³, lo cual sigue siendo insuficiente para cubrir la demanda por peso. Se continúa iterando hasta obtener la capacidad suficiente. Los resultados de todas las iteraciones hasta obtener la capacidad se muestran en la tabla 3.25.

Tabla 3.25. Resultados de iteraciones con método ADD hasta cumplir restricciones

Iteración ADD	Ubicación	Capacidad (t)	Capacidad (m ³)	Costo total (COP)
1	R	250	410	329 708 618
2	RF	410	750	314 689 147
3	RFM	670	1160	321 381 460
4	RFMT	840	1500	366 311 610
5	RFMTP	940	1940	422 133 784
6	RFMTPJ	1220	2300	478 976 364

En la sexta iteración del método ADD se cumple la capacidad para cubrir la demanda total de 1083,9t y 1489,9m³. Con las seis ubicaciones seleccionadas se desarrolla la asignación de las ciudades, seleccionando el menor costo de distribución para abastecer los puntos desde las localizaciones abiertas (tabla 3.26).

Tabla 3.26A. Asignación de ciudades a localizaciones abiertas (COP)

	Lugares a atender							
	A	B	C	D	E	F	G	H
F	9 132 739	12 172 083	5 496 556	43 892 429	1 198 987	0	40 432 747	36 574 947
J	24 776 783	27 739 346	2 441 290	35 441 091	15 233 557	65 351 779	12 794 336	30 504 952
M	22 814 936	25 644 447	3 205 106	32 566 150	7 739 889	61 175 027	19 703 939	27 508 700
T	37 799 393	41 645 138	4 487 880	6 493 403	23 476 591	90 916 387	29 357 546	41 095 156
P	1 792 723	4 334 273	6 892 623	54 723 028	3 479 203	18 687 368	53 061 782	29 239 294
R	19 043 452	21 617 186	4 169 927	21 115 951	11 604 480	53 145 579	32 002 370	21 748 662
Asigna	P	M	J	T	F	F	J	R

Tabla 3.26B. Asignación de ciudades a localizaciones abiertas (COP) (continuación)

	Lugares a atender								
	I	J	K	L	M	N	O	Q	T
F	27 867 134	27 610 208	5 332 829	18 739 421	11 132 921	4 665 955	12 842 690	19 461 722	61 816 374
J	16 018 390	0	12 191 154	13 478 055	14 311 219	5 740 955	9 193 350	9 594 234	51 447 764
M	11 987 732	6 902 552	3 217 644	10 880 954	0	404 078	8 577 349	12 767 011	47 920 612
T	42 773 619	31 573 396	22 062 015	30 717 427	27 983 227	11 611 520	13 869 358	17 199 790	0
P	43 051 595	40 226 356	10 204 163	24 605 286	17 915 658	7 563 117	16 921 364	27 340 531	75 104 006
R	4 239 140	19 287 514	7 845 412	5 888 253	8 291 984	3 156 382	4 629 342	10 975 682	19 247 302
	R	J	M	M	M	M	R	J	T

Los menores costos por asignación se encuentran resaltados en violeta en la tabla 3.26. Sin embargo, las ubicaciones B y L no son asignadas al menor costo debido a que se superaría la capacidad de los puntos de distribución respectivos, que serían P y R. Así que estos son asignados a un centro de distribución con capacidad suficiente, que en este caso es el punto M. De esta manera, las asignaciones y capacidades obtenidas para cada centro de distribución habilitado se presentan en las tablas 3.27 y 3.28.

Tabla 3.27. Asignación a centros de distribución por peso

Ciudad	Centro distribución					
	F	J	M	T	P	R
A	0	0	0	0	52,04	0
B	0	0	55,56	0	0	0
C	0	11,24	0	0	0	0
D	0	0	0	76,25	0	0
E	32,93	0	0	0	0	0
F	110,78	0	0	0	0	0
G	0	101,72	0	0	0	0
H	0	0	79,47	0	0	0
I	0	0	0	0	0	106,91
J	0	101,62	0	0	0	0
K	0	0	39,44	0	0	0
L	0	0	0	0	0	68,88
M	0	0	54,63	0	0	0
N	0	0	23,45	0	0	0
O	0	0	0	0	0	28,71
Q	0	46,71	0	0	0	0
T	0	0	0	93,55	0	0
Total	143,72	261,29	252,58	169,81	52,04	204,52
Cap.	160	280	260	170	100	250

Tabla 3.28. Asignación a centros de distribución por volumen

Ciudad	Centro distribución					
	F	J	M	T	P	R
A	0	0	0	0	71,53	0
B	0	0	76,38	0	0	0
C	0	15,45	0	0	0	0
D	0	0	0	104,82	0	0
E	45,27	0	0	0	0	45,27
F	152,28	0	0	0	0	152,28
G	0	139,82	0	0	0	0
H	0	0	109,24	0	0	0
I	0	0	0	0	0	0
J	0	139,68	0	0	0	0
K	0	0	54,22	0	0	0
L	0	0	0	0	0	0
M	0	0	75,09	0	0	0
N	0	0	32,24	0	0	0
O	0	0	0	0	0	0
Q	0	64,206	0	0	0	0
T	0	0	0	128,60	0	0
Total	197,56	359,17	347,19	233,42	71,53	197,56
Cap.	340	360	410	340	440	340

Ejercicio de aplicación 3.2

En una de las ciudades se desea desarrollar una distribución interna de los mercados. Se conoce la matriz de distancias entre cada uno de los puntos de la ciudad, los requerimientos de mercados y los costos asociados (tablas 3.29 y 3.30). Determine los puntos desde los cuales se deben distribuir los mercados y quiénes deben abastecer a cada uno de los puntos.

Tabla 3.29. Distancias entre los puntos de la ciudad (km)

Desde	Hasta					
	A2	B3	D4	E5	F6	G7
A2	0	3	5	7	8	7
B3	12	0	2	4	5	4
D4	10	9	0	5	4	2
E5	11	4	5	0	1	3
F6	10	5	4	1	0	2
G7	8	11	2	7	6	0

Tabla 3.30. Costos de operación y distribución

	A2	B3	D4	E5	F6	G7
Requerimientos de medicinas (w) (und)	3	1	2	3	1	5
Costo de enviar una unidad al punto (r) (COP/km-und)	16	20	10	17	20	14
Costo de operación (f) (COP)	130	215	140	180	200	275

Ejercicio 3.3

Selección de rutas de importación de ayudas

Solución ejercicio 3.3. Planeación de importación (método selección de modo)

Para determinar cómo se desarrolla el proceso de importación de los mercados, se evalúan los costos de inventarios en cada uno de los eslabones por los cuales transita la mercancía. Para ello, se utiliza la formulación de selección de medios de transporte (Ballou, 2004), ampliando los costos incurridos por el tipo de negociación según los incoterms. La fórmula completa de costos para evaluar el proceso de importación es la siguiente:

$$\begin{aligned}
 CTI = & \text{costo compra} + \text{inventario origen} \\
 & + \text{embalaje} + \text{carga} \\
 & + \text{transporte origen} \\
 & + I \text{ tránsito origen} \\
 & + \text{aduanas exportación} \\
 & + \text{manipulación origen} \\
 & + \text{transporte principal} \\
 & + I \text{ tránsito principal} + \text{seguro} \\
 & + \text{manipulación destino} \\
 & + \text{aduanas importación} \\
 & + \text{transporte destino} \\
 & + I \text{ tránsito destino} + \text{entrega} \\
 & + \text{inventario destino}
 \end{aligned}$$

Dado que se trata de un proceso de importación de mercancía y se conoce el precio *free on board* (FOB) o *cost insurance and freight* (CIF) de cada uno de los productos, solo se toman en cuenta los costos correspondientes al comprador de la mercancía:

Caso FOB

$$\begin{aligned}
 CTI = & \text{costo compra} + \text{transporte principal} \\
 & + I \text{ tránsito principal} + \text{seguro} \\
 & + \text{manipulación destino} \\
 & + \text{aduanas importación} \\
 & + \text{transporte destino} \\
 & + I \text{ tránsito destino} + \text{entrega} \\
 & + \text{inventario destino}
 \end{aligned}$$

Caso CIF

$$\begin{aligned}
 CTI = & \text{costo compra} + \text{manipulación destino} \\
 & + \text{aduanas importación} \\
 & + \text{transporte destino} \\
 & + I \text{ tránsito destino} + \text{entrega} \\
 & + \text{inventario destino}
 \end{aligned}$$

Donde los costos son definidos como sigue:

$$\text{costo compra} = D * C$$

$$\text{transporte principal} = D_t * r_{prin}$$

$$I \text{ tránsito principal} = i_{prin} CD \tau_{prin}$$

$$\text{manipulación destino} = n_e * MP$$

$$\begin{aligned}
 & \text{aduanas importación} \\
 & = D * C * (1.1) * (0.19) + D * C \\
 & * (0.1)
 \end{aligned}$$

$$\text{transporte destino} = D_t * r_{des}$$

$$I \text{ tránsito destino} = i_{des} CD \tau_{des}$$

$$\text{entrega} = n_e * m$$

$$\text{inventario destino} = iC' \left(\frac{Q}{2} + SS \right)$$

Las variables y los parámetros son definidos así:

$D =$ Demanda del producto (und)

$D_t =$ Demanda del producto en toneladas (t)

$n_e =$ Número de envíos = $\left\lceil \frac{D_t}{Q} \right\rceil$

$C =$ Costo de compra del producto $\left(\frac{\$}{und} \right)$

$r_{prim} =$ Costo transporte principal $\left(\frac{\$}{t} \right)$

$i =$ Tasa de mantener inventario $\left(\frac{\%}{\$ - año} \right)$

$\tau_{prim} =$ Tiempo de viaje en transporte principal (año)

$MP =$ Costo de manipulación en el puerto de destino $\left(\frac{\$}{contenedor} \right)$

$C_{CIF} =$ Costo CIF de producto $\left(\frac{\$}{und} \right)$

$r_{des} =$ Costo transporte en el destino $\left(\frac{\$}{und} \right)$

$\tau_{des} =$ Tiempo de viaje en transporte destino (año)

$C' = C + r_{prim} + r_{des}$

$Q =$ Tamaño de envío (und)

$SS =$ Stock de seguridad (und)

$m =$ Costo de descargar $\left(\frac{\$}{und} \right)$

Inicialmente, se determina la cantidad de productos que se requieren en cada uno de los centros de distribución a partir de la asignación desarrollada en la tabla 3.26. De esta manera, la cantidad de mercados correspondiente a cada centro se presenta en la tabla 3.31.

Tabla 3.31. Cantidad de mercados a distribuir por cada centro

Ciudad	Centro de distribución					
	F	J	M	T	P	R
A	0	0	0	0	15 040	0
B	0	0	16 060	0	0	0
C	0	3250	0	0	0	0
D	0	0	0	22 040	0	0
E	9520	0	0	0	0	0
F	32 020	0	0	0	0	0
G	0	29 400	0	0	0	0
H	0	0	22 970	0	0	0
I	0	0	0	0	0	30 900
J	0	29 370	0	0	0	0
K	0	0	11 400	0	0	0
L	0	0	0	0	0	19 910
M	0	0	15 790	0	0	0
N	0	0	6780	0	0	0
O	0	0	0	0	0	8300
Q	0	13 500	0	0	0	0
T	0	0	0	27 040	0	0
Total	41 540	75 520	73 000	49 080	15 040	59 110

A partir de la identificación de la cantidad de mercados, se desglosa la cantidad de productos requeridos por cada centro de distribución. Debe considerarse que en los mercados los productos vienen por una unidad, excepto la gaseosa, que viene por dos unidades. Las cantidades de cada producto para cada uno de los centros y la demanda en toneladas con base en el peso de cada producto se muestra en la tabla 3.32.

Tabla 3.32. Demanda de productos y demanda en toneladas por cada CEDI

	und/mercado	F	J	M	T	P	R
Atún	1	41 540	75 520	73 000	49 080	15 040	59 110
Gaseosa	2	83 080	151 040	146 000	98 160	30 080	11 8220
Bienestarina	1	41 540	75 520	73 000	49 080	15 040	59 110
Palomitas de maíz	1	41 540	75 520	73 000	49 080	15 040	59 110
	t/und	F	J	M	T	P	R
Atún	0,00016	6,65	12,08	11,68	7,85	2,41	9,46
Gaseosa	0,0011	91,39	166,14	160,60	107,98	33,09	130,04
Bienestarina	0,001	41,54	75,52	73,00	49,08	15,04	59,11
Palomitas de maíz	0,0001	4,15	7,55	7,30	4,91	1,50	5,91

Para los valores de manipulación de mercancía en los puertos de destino, se utilizan las tarifas presentadas por el puerto de Cartagena con el costo de descarga de un TEU (contenedor de 20 pies), correspondiente a COP 130 000/contenedor (Sociedad Portuaria Regional de Cartagena S. A., s. f.). Para el puerto de Buenaventura, la manipulación de un TEU se avalúa en USD 18,5; con una tasa representativa del mercado (TRM) de COP 3970 se tendría un costo por contenedor de COP 73 445/contenedor (Sociedad Portuaria Regional de Buenaventura S. A., 2013).

Para determinar los costos de transporte e inventario en tránsito, se identificaron las distancias en km y tiempos en años desde cada puerto a cada centro de distribución por medio de Google Maps (s. f.) y desde cada puerto de origen a cada centro de distribución por medio de Searates (2020). En cuanto al costo de transporte terrestre, la empresa ÑÑ Vehículos ofrece un costo de COP 325/t-km. Al multiplicar este valor por la distancia se obtiene el costo de transporte de cualquier par de trayectos. En las tablas 3.33 a 3.36 se presentan los tiempos, distancias y costos de transporte requeridos.

Tabla 3.33. Distancias desde puerto a CEDI en km

	Cartagen	Buenaventura
Finca Ubo	278,99	891,27
Cali	1054,61	122,38
Pereira	848,27	259,7
Inírida	1106,17	1015,53
Santa Marta	237,96	1262,92
Villavicencio	1184,14	601,04

Tabla 3.34. Costos de puerto a CEDI en COP/t

	Cartagen	Buenaventura
Finca Ubo	90 672	289 663
Cali	342 748	39 774
Pereira	275 688	84 403
Inírida	359 505	330 047
Santa Marta	77 337	410 449
Villavicencio	384 846	195 338

Tabla 3.35. Tiempos de puerto a CEDI en años

	Cartagena	Buenaventura
Finca Ubo	0,00053272	0,00195586
Cali	0,00226027	0,00027017
Pereira	0,00189117	0,0005175
Inírida	0,00360731	0,00273973
Santa Marta	0,0004414	0,00234779
Villavicencio	0,0022774	0,00144597

Tabla 3.36. Tiempos de puerto de origen – puerto destino en años

	Cartagena	Buenaventura
Hamburgo	0,04246575	0,04794521
Bremen	0,0423516	-----
Tokio	0,06986301	0,06803653

La determinación de cada uno de los costos para la importación del atún se presenta a continuación, junto con un ejemplo de cálculos que permite seleccionar la línea marítima y la ruta de abastecimiento del producto. Los tamaños de envío están dados por la capacidad de cada línea marítima (tabla 3.2):

$$\text{transporte principal} = D_t * r_{prin}$$

$$\begin{aligned} \text{transporte principal} &= 6,65 * (117,18 * 3970) \\ &= \text{COP } 3\,091\,936 \end{aligned}$$

El costo de transporte es de USD 117,18 en la línea Seabort, dado que es la única que tiene ruta desde Japón a Cartagena, mientras la TRM es de 3970:

$$\begin{aligned} \text{aduanas importación} \\ &= D * C * (1,1) * (0,19) + D * C \\ &* (0,1) \end{aligned}$$

aduanas importación

$$\begin{aligned}
 &= 41540 * 19550 * (1,1) \\
 &* (0,19) + 41.540 * 19.550 * 0,1 \\
 &= \text{COP } 250\ 941\ 063
 \end{aligned}$$

Para las aduanas de importación se desarrolló la descomposición en dos partes. El primer término corresponde al valor del IVA, donde se toma como precio base el costo de compra del producto. El valor de 1,1 corresponde al incremento del 10 % de aranceles y el 0,19 corresponde al valor del IVA de los productos. El segundo término se asocia al valor del 10 % de aranceles de la mercancía:

$$I \text{ tránsito principal} = i_{prin} CD \tau_{prin}$$

$$\begin{aligned}
 I \text{ tránsito principal} &= 0,12 * 19550 * 41540 \\
 &* 0,0698 = \text{COP } 6\ 808\ 349
 \end{aligned}$$

Donde i es la tasa de mantener el inventario en el tránsito marítimo y τ_{prin} es el tiempo de viaje en años desde el puerto de Tokio hasta el puerto de Cartagena:

$$Seguro = CD(4\%)$$

$$\begin{aligned}
 Seguro &= 19550 * 41540 * 0,04 \\
 &= \text{COP } 32\ 484\ 280
 \end{aligned}$$

El seguro se determina con base en el valor de la mercancía comprada y para el ejercicio se estipuló que corresponde al 4 %. El detalle para todas las opciones de importación de atún a cada uno de los CEDI se presenta en la tabla 3.37.

Tabla 3.37. Costos del proceso de importación de atún desde Japón por las líneas Seabort y Marsk

Puerto destino	CEDI	Q (t)	D	D (t)	Transporte principal (COP)	Aduanas importación (COP)	Tránsito principal (COP)	Seguro (COP)
Cartagena	Finca Ubo	8	41 540	6,65	3 091 936	250 941 063	6 808 349	32 484 280
	Cali	8	75 520	12,08	5 621 160	456 212 544	12 377 625	59 056 640
	Pereira	8	73 000	11,68	5 433 590	440 989 350	11 964 600	57 086 000
	Inírida	8	49 080	7,85	3 653 159	296 489 826	8 044 145	38 380 560
	Santa Marta	8	15 040	2,41	1 119 468	90 855 888	2 465 035	11 761 280
	Villavicencio	8	59 110	9,46	4 399 719	357 080 555	9 688 048	46 224 020
Buenaventura	Finca Ubo	10	41 540	6,65	2 782 689	250 941 063	6 630 353	32 484 280
	Cali	10	75 520	12,08	5 058 948	456 212 544	12 054 027	59 056 640
	Pereira	10	73 000	11,68	4 890 138	440 989 350	11 651 800	57 086 000
	Inírida	10	49 080	7,85	3 287 780	296 489 826	7 833 840	38 380 560
	Santa Marta	10	15 040	2,41	1 007 502	90 855 888	2 400 590	11 761 280
	Villavicencio	10	59 110	9,46	3 959 672	357 080 555	9 434 766	46 224 020

$$\text{número de envíos} = n_e = \left\lceil \frac{D_t}{Q} \right\rceil$$

$$n_e = \left\lceil \frac{6,646}{8} \right\rceil = 1$$

$$\text{manipulación destino} = n_e * MP$$

$$\begin{aligned} \text{manipulación destino} &= 1 * 130\,000 \\ &= \text{COP } 130\,000 \end{aligned}$$

El costo de manipulación en destino se determina por la cantidad de veces que se deben hacer las descargas en puerto. En este caso, la cantidad demandada es de 6,65 toneladas y la capacidad del envío es de 8 toneladas. De esta forma se debe hacer un envío y la descarga en el puerto tiene un costo de COP 130 000.

$$\text{transporte destino} = D_t * r_{des}$$

$$\begin{aligned} \text{transporte destino} &= 6,648 * 325 * 278,99 \\ &= \text{COP } 602\,641 \end{aligned}$$

El costo de transporte de la empresa es de COP 325 por km y tonelada transportada. En este caso, las toneladas transportadas son 6,648 t y se transportan 278,99 km desde Cartagena a la Finca Ubo (tabla 3.33):

$$I \text{ tránsito destino} = i_{des} C D \tau_{des}$$

$$\begin{aligned}
 I \text{ tránsito destino} &= 0,18 * 19550 * 41540 \\
 &* 0,00053272 = \text{COP } 77 \ 873
 \end{aligned}$$

El costo de inventario en tránsito en el destino tiene en cuenta la tasa del 18 %, el costo de la mercancía transportada y el tiempo de viaje en años desde Cartagena a la Finca Ubo (tabla 3.35):

$$\begin{aligned}
 entrega &= n_e * m \\
 entrega &= 1 * 30000 = \text{COP } 30 \ 000
 \end{aligned}$$

El costo de entrega se paga por cada descarga; de manera que la cantidad de descargas que se hacen es 1 por un valor de COP 30 000:

$$\begin{aligned}
 C' &= C + r_{prim} + r_{des} \\
 C'_t &= \left(\frac{19550}{160/1000000} \right) + (117,18 * 3970) \\
 &+ (90.672) = \text{COP } \frac{122 \ 743 \ 376}{t}
 \end{aligned}$$

C'_t corresponde al costo de una tonelada de producto en el destino. El primer término corresponde al costo de comprar una tonelada de atún, que se obtiene al dividir el costo de una unidad por su peso en toneladas. El segundo término es el costo de transporte de una tonelada de atún por vía marítima en pesos y el último término corresponde al costo de transportar una tonelada desde el puerto de Cartagena hasta la Finca Ubo (tabla 3.34). Se determinó así que el costo de una tonelada de atún en el lugar de destino es de COP 122 743 376.

$$\begin{aligned}
 inventario \ destino &= i C' \left(\frac{Q_c + SS}{2} \right) \\
 inventario \ destino &= 0,18 * 122.743.376 \\
 &* \left(\frac{\left(\frac{6,646}{1} \right)}{2} + 0 \right) \\
 &= \text{COP } 73 \ 422 \ 142
 \end{aligned}$$

La determinación del costo de inventario en el destino está compuesta por la tasa de mantener una tonelada, el valor de una tonelada de producto en el lugar de destino y el inventario promedio. En este caso, el inventario promedio se aproxima por la cantidad de producto entregado sobre la cantidad de envíos, asumiendo que la demanda se distribuye proporcionalmente en cada envío, para así determinar la cantidad ajustada que se presenta en la ecuación. Por otra parte, no se mantiene *stock* de seguridad de los productos (tabla 3.38).

La aproximación al tamaño de pedido que se presenta en este ejemplo se utiliza teniendo en cuenta que esta demanda solo ocurre una vez. En caso de una demanda que se mantiene en el tiempo, se puede utilizar la capacidad completa por envío o el tamaño económico de pedido EOQ.

Tabla 3.38. Costos del proceso de importación de atún desde Japón por las líneas Seaborn y Marsk (COP)

Puerto destino	CEDI	Manipulación en destino	Transporte destino	Tránsito destino	Descarga	Inventario destino	Costo total
Cartagena	Finca Ubo	130 000	602 641	77 873	30 000	73 422 142	367 588 284
	Cali	260 000	4 141 496	600 679	60 000	66 878 040	605 208 183
	Pereira	260 000	3 220 033	485 818	60 000	64 611 163	584 110 553
	Inírida	130 000	2 823 123	623 027	30 000	86 939 125	437 112 965
	Santa Marta	130 000	186 104	23 361	30 000	26 580 381	133 151 518
	Villavicencio	260 000	3 639 715	473 717	60 000	52 363 797	474 189 570
Buenaventura	Finca Ubo	73 445	1 925 215	285 906	30 000	73 541 174	368 694 125
	Cali	146 890	480 591	71 798	60 000	66 713 299	599 854 737
	Pereira	146 890	985 821	132 940	60 000	64 510 623	580 453 563
	Inírida	73 445	2 591 795	473 185	30 000	86 918 306	436 078 738
	Santa Marta	73 445	987 704	124 259	30 000	26 652 526	133 893 194
	Villavicencio	73 445	1 847 429	300 773	30 000	104 566 288	523 516 947

El costo total presentado en la tabla 3.38 corresponde a la suma de todos los costos, en este caso con la negociación tipo FOB. Con base en el costo total se seleccionan las rutas de menores costos para el abastecimiento de los productos, que para el caso del atún se presentan en la tabla 3.39.

Tabla 3.39. Rutas seleccionadas para el abastecimiento de atún

Puerto origen	Línea marítima	Puerto destino	CEDI
Tokio	Seabort	Cartagena	Finca Ubo
Tokio	Marsk	Buenaventura	Cali
Tokio	Marsk	Buenaventura	Pereira
Tokio	Marsk	Buenaventura	Inírida
Tokio	Seabort	Cartagena	Santa Marta
Tokio	Seabort	Cartagena	Villavicencio

De la misma manera se desarrollan los costos para la importación de la gaseosa con negociación tipo CIF (tablas 3.40 y 3.41). Dado que es CIF, para esta importación no se incluyen los costos del transporte principal.

Tabla 3.40. Cantidades y costos para el proceso de importación de gaseosa

Puerto destino	CEDI	Q (t)	D (mercados)	D (t)	Aduanas importación (COP)	Manipulación en destino (COP)
Cartagena	Finca Ubo	23,6	83 080	91,4	647 440 778	520 000,00
	Cali	23,6	151 040	166,1	1 177 051 699	1 040 000,00
	Pereira	23,6	146 000	160,6	1 137 775 080	910 000,00
	Inírida	23,6	98 160	108,0	764 958 917	650 000,00
	Santa Marta	23,6	30 080	33,1	234 412 838	260 000,00
	Villavicencio	23,6	118 220	130,0	921 286 096	780 000,00
Buenaventura	Finca Ubo	23,6	83 080	91,4	647 440 778	293 780,00
	Cali	23,6	151 040	166,1	1 177 051 699	587 560,00
	Pereira	23,6	146 000	160,6	1 137 775 080	514 115,00
	Inírida	23,6	98 160	108,0	764 958 917	367 225,00
	Santa Marta	23,6	30 080	33,1	234 412 838	146 890,00
	Villavicencio	23,6	118 220	130,0	921 286 096	440 670,00

Esta mercancía se trae en TEU, de manera que la capacidad de transporte es de 23,6 t. A continuación, se detallan los cálculos para traer la mercancía por Buenaventura hasta Pereira:

$$\begin{aligned}
 & \text{aduanas importación} \\
 & = D * C * (1,1) * (0,19) + D * C \\
 & * (0,1)
 \end{aligned}$$

aduanas importación

$$\begin{aligned}
 &= 146000 * 25220 * (1,1) \\
 &* (0,19) + 146000 * 25220 * 0,1 \\
 &= \text{COP } 1\ 137\ 775\ 080
 \end{aligned}$$

$$\text{número de envíos} = n_e = \left\lceil \frac{D_t}{Q} \right\rceil$$

$$n_e = \left\lceil \frac{160,6}{23,6} \right\rceil = 7$$

manipulación destino = $n_e * MP$

$$\begin{aligned}
 \text{manipulación destino} &= 7 * 7344 \\
 &= \text{COP } 514\ 115
 \end{aligned}$$

Tabla 3.41. Costos para el proceso de importación de gaseosa (COP)

Puerto destino	CEDI	Transporte destino	I tránsito destino	Descarga	Inventario destino	Costo total
Cartagena	Finca Ubo	8 286 310	200 917	120 000	47 330 188	703 898 193
	Cali	56 945 565	1 549 782	240 000	43 494 462	1 280 321 508
	Pereira	44 275 453	1 253 434	210 000	47 910 799	1 232 334 765
	Inírida	38 817 939	1 607 441	150 000	45 259 436	851 443 733
	Santa Marta	2 558 927	60 274	60 000	34 252 944	271 604 982
	Villavicencio	50 046 079	1 222 214	180 000	45 473 317	1 018 987 706
Buenaventura	Finca Ubo	26 471 699	737 653	120 000	47 739 359	722 803 270
	Cali	6 608 128	185 243	240 000	42 928 165	1 227 600 796
	Pereira	13 555 042	342 992	210 000	47 515 822	1 199 913 050
	Inírida	35 637 182	1 220 841	150 000	45 202 183	847 536 348
	Santa Marta	13 580 937	320 594	60 000	34 748 934	283 270 193
	Villavicencio	25 402 144	776 009	180 000	45 103 658	993 188 577

$$\text{transporte destino} = D_t * r_{des}$$

$$\begin{aligned}
 \text{transporte destino} &= 160,6 * 325 * 259,7 \\
 &= \text{COP } 13\ 555\ 042
 \end{aligned}$$

$$I \text{ tránsito destino} = i_{des} CD \tau_{des}$$

$$\begin{aligned}
 I \text{ tránsito destino} &= 0,18 * 25220 * 146000 \\
 &* 0,0005175 = \text{COP } 342\ 992
 \end{aligned}$$

$$\text{entrega} = n_e * m$$

$$\text{entrega} = 7 * 30000 = \text{COP } 210\ 000$$

$$C' = C + r_{des}$$

$$C'_t = \left(\frac{25220}{1,1/1000} \right) + (84.403) = \frac{\text{COP } 23\ 011\ 675}{t}$$

$$\text{inventario destino} = iC' \left(\frac{Q_c}{2} + ss \right)$$

$$\begin{aligned} \text{inventario destino} &= 0,18 * 23\ 011\ 675 \\ &* \left(\frac{\left(\frac{160,6}{7} \right)}{2} + 0 \right) \\ &= \text{COP } 47\ 515\ 822 \end{aligned}$$

A partir del costo total obtenido en la tabla 3.40, se seleccionaron las rutas de menores costos para el abastecimiento de gaseosa a cada centro de distribución, las cuales se muestran en la tabla 3.42.

Tabla 3.42. Rutas seleccionadas para el abastecimiento de gaseosa

Puerto destino	CEDI
Cartagena	Finca Ubo
Buenaventura	Cali
Buenaventura	Pereira
Buenaventura	Inírida
Cartagena	Santa Marta
Buenaventura	Villavicencio

La estructura de la cadena de suministro de mercados obtenida para la importación de los productos y la distribución de mercados, consolidando el proceso de importación y el de distribución desde los CEDI, se presenta en la figura 3.4.

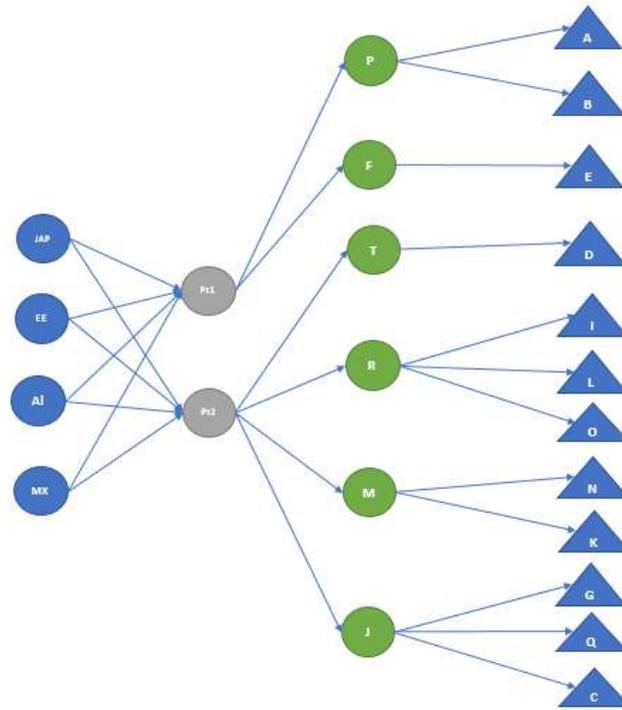


Figura 3.4. Cadena de distribución obtenida.

Ejercicio de aplicación 3.3

En el proceso de distribución de los mercados, se requiere definir las rutas de abastecimiento de bienestarina y palomitas de maíz. Teniendo en cuenta que la bienestarina se compra FOB y existen tres líneas marítimas disponibles para traer la mercancía, y que las palomitas se compran CIF, determine las líneas de distribución y las formas de comprar estos dos productos.

Descripción caso de estudio 3.2

Debido al impacto que puede tener el aislamiento obligatorio en la economía de las personas, los mandatarios del país han decidido distribuir mercados solidarios a algunas familias seleccionadas. Para el proceso de distribución se ha definido un único punto en Bogotá desde el que se distribuye a las diferentes ciudades con requerimientos de mercados.

La composición de los mercados que se entregarán a las familias se ha ampliado. La tabla 3.43 presenta la información de cada uno de los productos que tiene el mercado. Para el transporte y almacenamiento de cada producto se dispone de un espacio cúbico.

Tabla 3.43. Composición del mercado

#	Producto	Cantidad por mercado	N.º veces a alistar al mes	Peso (g)	Dimensiones (cm)		
					Alto	Ancho	Largo
1	Atún	1	26	160	6	11	10
2	Gaseosa	2	20	1100	8	8	5
3	Bienestarina	1	45	1000	12	17	20
4	Palomitas de maíz	1	20	100	10	9	19
5	Galletas	2	70	340	11	14	10
6	Dulces	1	7	148	10	10	15
7	Nachos	3	45	295	10	5	11
8	Papas fritas	2	70	268	17	18	7
9	Agua	2	31	205	7	10	5
10	Achiras	2	40	331	11	11	11
11	Chocolates	3	83	223	7	11	15
12	Gomas anaconda	1	11	340	11	11	8
13	Chocorramo	2	200	328	19	20	15
14	Bebida malta	3	51	337	7	18	9
15	Arequipe	1	30	186	19	17	20
16	Maíz procesado	1	41	442	13	9	5
17	Chitos	2	51	113	12	5	5
18	Maní	1	41	360	9	11	5
19	Snickers	1	60	365	6	17	13
20	Cerveza	1	29	202	12	13	13

Para todo el transporte de mercancía dentro del país, la empresa ÑÑ Vehículos ha ganado la licitación y puede transportar la mercancía entre cualquier par de ubicaciones, desde que tengan la disposición de vías. Su tarifa es de COP 325/t-km transportado. Los vehículos de esta empresa tienen una capacidad de transporte de 25 t y 150 m³. Adicionalmente, el

retorno de un vehículo al centro de distribución en Bogotá desde cualquier punto tiene un costo de COP 50 000.

Para recolectar la información de las familias que serían beneficiarias de estos auxilios, inicialmente se consultaron diferentes bases de datos y se identificaron los lugares y las cantidades de mercados que serán entregados a cada una de las familias (tabla 3.44). Por cada familia será entregado un único mercado durante el año.

Asimismo, en cada uno de estos puntos se ha ubicado una bodega en la que se recibirán y se entregarán los mercados a las familias junto con una gorra (la llegada de familias a reclamar los mercados será de forma constante durante el año). En cada uno de estos puntos se han identificado algunos costos de manipular los mercados y de enviar un vehículo (tabla 3.44).

Tabla 3.44. Ubicaciones de las familias a ser beneficiadas

	Ubicación	Mercados /año	Conexiones*	Volumen bodega (m ²)	Costo arriendo (COP/mes)	Costo personal (COP/mes)	Costos equipos (COP/mes)	Costo enviar pedido (COP/pedido)
A	Barranquilla	15 040	B, H	43	5 000 000	8 000 000	800 000	281 000
B	Cartagena	16 060	A, E, F, L	45	4 000 000	5 000 000	200 000	274 000
C	Tumaco	3250	J, Q, T, R	55	10 000 000	1 000 000	700 000	73 000
D	Puerto Carreño	22 040	I, H, R, T	100	9 000 000	7 000 000	900 000	107 000
E	Sincelejo	9520	L, K	40	8 000 000	6 000 000	700 000	57 000
F	Finca Ubo	32 020	P, E, I, K, M, Q	70	19 000 000	4 000 000	100 000	165 000
G	Florencia	29 400	O, Q, I	60	13 000 000	6 000 000	500 000	255 000
H	Arauca	22 970	L, D, A	73	17 000 000	6 000 000	700 000	263 000
I	Bogotá	30 900	L, D, O, J, N	70	17 000 000	20 000 000	100 000	138 000
J	Cali	29 370	C, I, G	38	3 000 000	9 000 000	800 000	278 000
K	Medellín	11 400	M, N, E, L	40	17 000 000	5 000 000	600 000	234 000
L	Tunja	19 910	K, A, I, H, B	25	4 000 000	7 000 000	700 000	121 000
M	Pereira	15 790	N, J	83	7 000 000	6 000 000	600 000	87 000
N	Manizales	6780	M, I, K	40	12 000 000	5 000 000	100 000	128 000
O	Mitú	8300	I, F, G	68	4 000 000	2 000 000	400 000	193 000
Q	Mocoa	13 500	C, G	55	3 000 000	9 000 000	700 000	165 000
T	Inírida	27 040	C, G, J, D	95	12 000 000	9 000 000	300 000	265 000

Nota: las conexiones representan los lugares a los que se puede viajar desde cada ubicación. Para todos los cálculos se utiliza una TRM de COP 3970 y 365 días al año.

Por su parte, el centro de distribución escogido en Bogotá tiene un espacio en el almacén de 20 m de frente, 20 m de fondo y 2 m de altura, y sus costos mensuales son de COP 30 000 000 por arriendo, COP 15 000 000 por el personal que trabaja en bodega y COP 3 200 000 por la utilización del equipo de manejo de materiales. El CEDI de Bogotá también ha identificado que pedir y recibir un pedido para el alistamiento de los mercados cuesta COP 1 000 000 sin importar la cantidad de mercados de los que deba abastecerse. Las estanterías de la bodega presentan la estructura de las figuras 3.5 y 3.6 y se dispone de todas las que se consideren necesarias.

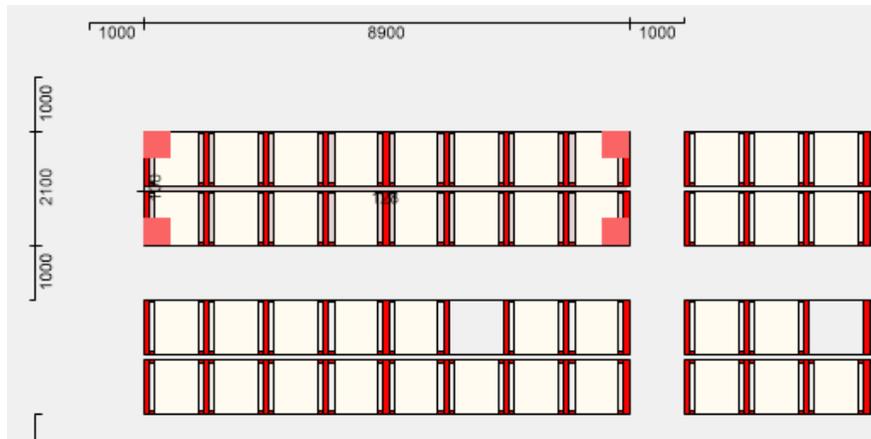


Figura 3.5. Vista frontal de la estantería con medidas en mm.

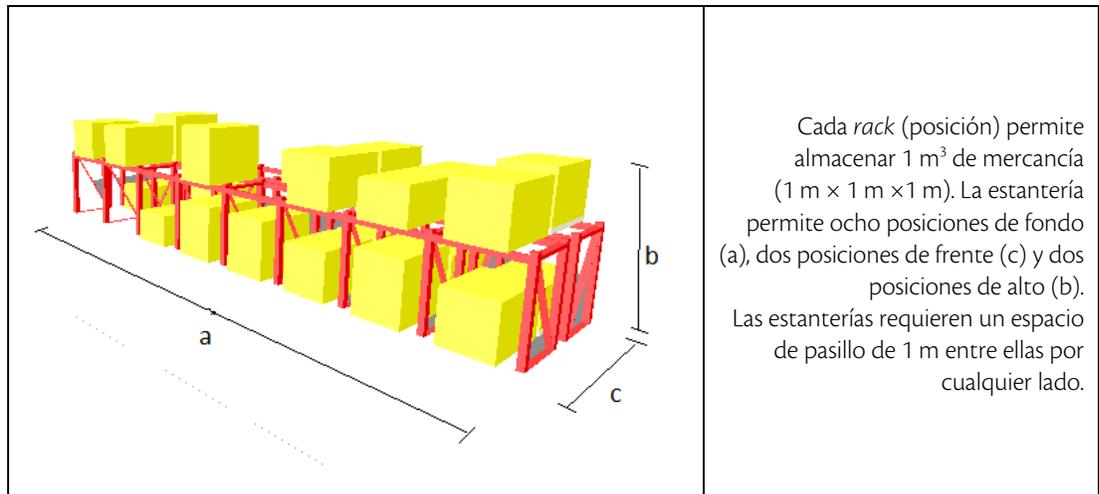


Figura 3.6. Medidas de la estantería.

Ejercicio 3.4

Planeación de inventario de mercados

Solución ejercicio 3.4

Planeación de inventarios (método de una bodega y múltiples minoristas - Schwarz)

Por medio del modelo de inventarios de una bodega y múltiples compradores es posible determinar las cantidades y los momentos para enviar los mercados a cada punto donde se encuentran las familias durante el año, a fin de coordinar adecuadamente los envíos y minimizar los costos de operación. Para identificar las cantidades de pedido se implementa el algoritmo de Schwarz y se utiliza la siguiente nomenclatura:

Conjuntos:

$J: \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ conjunto de agentes, Centro distribución = 0

Parámetros:

t_j^* = tiempo entre pedidos del agente $j \in J$

K_j = Costo de enviar una orden al agente j
 $\in J \left(\frac{\$}{\text{pedido}} \right)$

h_j = Costo de mantener una unidad por unidad de tiempo del agente $j \in J$

D_j = Demanda del agente $j \in J$

t_0^{**} = tiempo entre pedidos base de coordinación (tiempo CD)

n_j = constante de coordinación del agente j
 $\in J$

El algoritmo está compuesto de los siguientes pasos:

Paso 1:

Calcular el tiempo de ciclo óptimo de pedido para cada agente a partir de:

$$t_j^* = \sqrt{\frac{2K_j}{h_j D_j}}$$

Paso 2:

Si $t_o^* \geq \max\{t_j^*\}$, se define: $t_o^* = t_o^{**}$. De lo contrario, se define un conjunto de minoristas con un tiempo mayor al de la bodega: $M = \{j \mid t_j^* > t_o^*\}$. Se calcula un nuevo t_o^* :

$$t_o^{**} = \sqrt{2 \left(K_0 + \sum_{i \in M} K_i \right) - \left(D_0 h_0 + \sum_{i \in M} D_i h_i \right)}$$

Paso 3:

Con el t_o^{**} establecido en el paso 2, para cada minorista j se encuentra el n_j entero que minimiza los costos:

$$\min C_j = \frac{n_j K_j}{t_o^{**}} + \frac{h_j D_j t_o^{**}}{2n_j} \quad \forall j \in J \mid j \neq 0$$

Inicialmente, se determina el volumen y el peso de cada uno de los nuevos productos que se han adquirido para el mercado (tabla 3.45).

Tabla 3.45. Composición de productos del mercado

Producto	Cant. por mercado	N.º veces a alistar al mes	Peso (g)	Dimensiones (cm)			Vol. (m³/und)	Peso (t/und)
				Alto	Ancho	Largo		
1 Atún	1	26	160	6	11	10	0,00066	0,00016
2 Gaseosa	2	20	1100	8	8	5	0,00032	0,0011
3 Bienestarina	1	45	1000	12	17	20	0,00408	0,001
4 Palomitas de maíz	1	20	100	10	9	19	0,00171	0,0001
5 Galletas	2	70	340	11	14	10	0,00154	0,00034
6 Dulces	1	7	148	10	10	15	0,0015	0,000148
7 Nachos	3	45	295	10	5	11	0,00055	0,000295
8 Papas fritas	2	70	268	17	18	7	0,002142	0,000268
9 Agua	2	31	205	7	10	5	0,00035	0,000205
10 Achiras	2	40	331	11	11	11	0,001331	0,000331
11 Chocolates	3	83	223	7	11	15	0,001155	0,000223

Producto	Cant. por mercado	N.º veces a alistar al mes	Peso (g)	Dimensiones (cm)			Vol. (m³/und)	Peso (t/und)
				Alto	Ancho	Largo		
12 Gomas	1	11	340	11	11	8	0,000968	0,00034
13 Chocorramo	2	200	328	19	20	15	0,0057	0,000328
14 Bebida malta	3	51	337	7	18	9	0,001134	0,000337
15 Arequipe	1	30	186	19	17	20	0,00646	0,000186
16 Maíz	1	41	442	13	9	5	0,000585	0,000442
17 Chitos	2	51	113	12	5	5	0,0003	0,000113
18 Maní	1	41	360	9	11	5	0,000495	0,00036
19 Snickers	1	60	365	6	17	13	0,001326	0,000365
20 Cerveza	1	29	202	12	13	13	0,002028	0,000202

De esta forma, se determina el volumen y el peso total de un mercado, dado por:

$$\begin{aligned}
 \text{volumen mercado} &= \sum \text{vol producto} \\
 & * \text{num productos} \\
 &= 0,051695 \text{ m}^3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{peso mercado} &= \sum \text{peso producto} \\
 & * \text{num productos} = 0,011238 \text{ t}
 \end{aligned}$$

Con la información de los mercados, es posible determinar los costos de inventarios en cada ciudad.

Tabla 3.46. Costos asociados al manejo de inventarios por ciudad (COP)

Ubicación	Mercados/año	Volumen bodega (m³)	Costo arriendo	Costo personal	Costos equipos	Costo mantener mercado/año	Costo enviar pedido
BOD Bogotá	313 290	800	30 000 000	15 000 000	3 200 000	37 375	1 000 000
A Barranquilla	15 040	43	5 000 000	8 000 000	800 000	199 086	281 000
B Cartagena	16 060	45	4 000 000	5 000 000	200 000	126 825	274 000
C Tumaco	3250	55	10 000 000	1 000 000	700 000	131 963	73 000
D Puerto Carreño	22 040	100	9 000 000	7 000 000	900 000	104 837	107 000
E Sincelejo	9520	40	8 000 000	6 000 000	700 000	227 975	57 000
F Finca Ubo	32 020	70	19 000 000	4 000 000	100 000	204 712	165 000
G Florencia	29 400	60	13 000 000	6 000 000	500 000	201 611	255 000
H Arauca	22 970	73	17 000 000	6 000 000	700 000	201 398	263 000
I Bogotá	30 900	70	17 000 000	20 000 000	100 000	328 780	138 000
J Cali	29 370	38	3 000 000	9 000 000	800 000	208 957	278 000

	Ubicación	Mercados/año	Volumen bodega (m ³)	Costo arriendo	Costo personal	Costos equipos	Costo mantener mercado/año	Costo enviar pedido
K	Medellín	11 400	40	17 000 000	5 000 000	600 000	350 492	234 000
L	Tunja	19 910	25	4 000 000	7 000 000	700 000	290 319	121 000
M	Pereira	15 790	83	7 000 000	6 000 000	600 000	101 646	87 000
N	Manizales	6780	40	12 000 000	5 000 000	100 000	265 195	128 000
O	Mitú	8300	68	4 000 000	2 000 000	400 000	58 385	193 000
Q	Mocoa	13 500	55	3 000 000	9 000 000	700 000	143 242	165 000
T	Inírida	27 040	95	12 000 000	9 000 000	300 000	139 087	265 000

En la tabla 3.46 se presenta el costo de mantener un mercado por año en función del tamaño de la bodega. En el caso del centro de distribución de Bogotá, el volumen es de 800 m³ (20 m × 20 m × 2 m). La demanda del CEDI corresponde a la suma de las demandas de los puntos a los cuales debe distribuir, en este caso se deben distribuir 313 290 mercados en todo el país. La fórmula para determinar el costo de mantenimiento en el caso de Mocoa se presenta a continuación:

$$\begin{aligned}
 h_j &= \frac{(\sum \text{costos operación mensuales} * 12)}{\text{volumen para almacenar del agente } j} \\
 &\quad * \text{volumen de un mercado} \\
 h_{Mocoa} &= \frac{(3\,000\,000 + 9\,000\,000 + 700\,000) * 12}{55} \\
 * 0,051695 &= \frac{COP\ 143\ 242}{und} - \text{año}
 \end{aligned}$$

Con toda la información se procede a aplicar el algoritmo de Schwarz (tabla 3.47).

Tabla 3.47. Valores obtenidos con la aplicación del algoritmo de Schwarz

Agente	Paso 1	Paso 2			Paso 3
	τ*	Conjunto	K _j (COP)	d _j h _j (COP)	n _j
BOD	0,01306918	1	1 000 000	11 709 365 696	1
A	0,01370011	1	281 000	2 994 251 341	1
B	0,01640269	1	274 000	2 036 810 571	1
C	0,01845051	1	73 000	428 880 518	1
D	0,00962372	0	0	0	1
E	0,00724754	0	0	0	2
F	0,00709536	0	0	0	2
G	0,00927587	0	0	0	2

Agente	Paso 1	Paso 2			Paso 3
	t^*	Conjunto	K_j (COP)	$d_j h_j$ (COP)	n_j
H	0,01066313	0	0	0	1
I	0,00521222	0	0	0	3
J	0,00951826	0	0	0	2
K	0,01082259	0	0	0	1
L	0,00647045	0	0	0	2
M	0,0104121	0	0	0	1
N	0,01193225	0	0	0	1
O	0,02822307	1	193 000	484 595 012	1
Q	0,01306335	0	0	0	1
T	0,01187112	0	0	0	1
		Total	1 821 000	17 653 903 138	

Los cálculos realizados se muestran con el ejemplo de Mocoa y el centro de distribución de Bogotá.

Paso 1:

Se determina el tiempo entre pedidos:

$$t_{Mocoa}^* = \sqrt{\frac{2 * 165000}{143242 * 13500}} = 0,013063 \text{ años}$$

$$t_{BOD}^* = \sqrt{\frac{2 * 1000000}{37375 * 313290}} = 0,013069 \text{ años}$$

Paso 2:

Se identifican los agentes que tienen un tiempo menor al del centro de distribución en Bogotá, los cuales se han etiquetado con un 1 en la columna conjunto de la tabla 3.47: ciudades etiquetadas como A, B, C y O. Con estos se determina el tiempo de coordinación ajustado:

$$t_{BOD}^{**} = \sqrt{\frac{2 * (1000000 + 281000 + 274000 + 73000 + 193000)}{(11.709.365.696 + 2.994.251.341 + 2.036.810.571 + 428.880.518 + 484.595.012)}} = 0,014363 \text{ años}$$

Paso 3:

Con el t_{BOD}^{**} ajustado, se determinan las constantes de coordinación que minimizan los costos del agente basados en la ecuación:

$$\min C_j = \frac{n_j K_j}{t_0^{**}} + \frac{h_j D_j t_0^{**}}{2n_j} \quad \forall j \in J \mid j \neq 0$$

Al desarrollar esta ecuación y derivar respecto a n_j , se obtiene la siguiente relación, que es aplicable para determinar la constante de coordinación que minimiza los costos:

$$n_j = \frac{t_0^{**}}{t_j}$$

$$n_{Mocoa} = \frac{0,014363}{0,013063} = 1,099 \approx 1$$

$$n_{Tunja} = \frac{0,014363}{0,00647} = 2,219 \approx 2$$

A partir de los resultados obtenidos es posible calcular los costos totales para cada agente y las cantidades a enviar, teniendo en cuenta la relación de $Q = Dt_j$ (tabla 3.48).

Tabla 3.48. Costos y cantidades de pedido para cada agente al aplicar el algoritmo de Schwarz

Agente	Ubicación	Costo total (COP)	Q (und)	Q (t)	Q (m³)
BOD	Bodega	153 714 295	4500	50,57	232,63
A	Barranquilla	41 067 394	216	2,43	11,17
B	Cartagena	33 704 104	231	2,60	11,94
C	Tumaco	8 162 489	47	0,53	2,43
D	P. Carreño	24 043 491	317	3,56	16,39
E	Sincelejo	15 730 141	137	1,54	7,08
F	Finca Ubo	46 512 659	460	5,17	23,78
G	Florencia	56 791 384	422	4,74	21,82
H	Arauca	51 533 523	330	3,71	17,06
I	Bogotá	53 143 706	444	4,99	22,95
J	Cali	60 747 040	422	4,74	21,82

Agente	Ubicación	Costo total (COP)	Q (und)	Q (t)	Q (m³)
K	Medellín	44 986 461	164	1,84	8,48
L	Tunja	37 604 334	286	3,21	14,78
M	Pereira	17 583 533	227	2,55	11,73
N	Manizales	21 824 341	97	1,09	5,01
O	Mitú	16 917 321	119	1,34	6,15
Q	Mocoa	25 375 237	194	2,18	10,03
T	Inírida	45 459 218	388	4,36	20,06

Determinación de costo del agente:

$$C_j = \frac{n_{Mj}K_j}{t_0^{**}} + \frac{h_j D_j t_0^{**}}{2n_j}$$

$$\begin{aligned}
 C_{Mocoa} &= \frac{1 * 165000}{0,014363} \\
 &+ \frac{143242 * 13500 * 0,014363}{2 * 1} \\
 &= COP 25 375 273
 \end{aligned}$$

Determinación del tamaño de pedido:

$$Q_j = D_j * \frac{t_0^{**}}{n_j}$$

$$\begin{aligned}
 Q_{Mocoa} &= 13500 * \frac{0,014363}{1} = 193,9 \\
 &\approx 194 \text{ mercados}
 \end{aligned}$$

El tamaño de envío en toneladas y en metros cúbicos corresponde a la cantidad de envío multiplicado por el peso en toneladas o el volumen en m³ de un mercado, respectivamente.

Ejercicio de aplicación 3.4

En una ciudad se tienen unos puntos en los que se entregan las ayudas. Para cada uno de estos puntos se conoce su costo de mantener un mercado durante un año y los costos de recibir un pedido. Todos los puntos son abastecidos desde el punto en Usaquén. La tabla 3.49 presenta los costos y requerimientos de mercados anuales para cada agente.

Tabla 3.49. Costos de inventarios de los agentes en la ciudad

Letra	Ubicación	Mercados/año Di (und/año)	Costo de pedir Ki (COP/pedido)	Costo de mantener (COP/und-año)
HZ	Usaquén	31 624	700 000	\$ 20 250
A	Engativá	2246	98 534	\$ 81 937
B	Kennedy	4501	374 910	\$ 12 519
C	Suba	8789	495 489	\$ 73 957
D	Chapinero	1691	162 511	\$ 69 900
E	Bosa	1326	86 183	\$ 27 946
F	Soacha	8511	362 383	\$ 20 689
G	Usme	4560	256 310	\$ 85 258

Con la información presentada, identifique la cantidad de mercados que debe almacenar cada uno de los agentes y el costo de su inventario.

Ejercicio 3.5

Planeación de rutas de distribución de mercados

Solución ejercicio 3.5

Modelo de ruteo Clarke & Wright

Para la planeación de rutas y entrega de productos, se utilizará una cantidad aproximada de mercados que se presenta en la tabla 3.50, con el peso y el volumen ocupados por cada pedido. Para la construcción de las rutas de distribución se utiliza el algoritmo de Clarke & Wright, que se muestra a continuación:

P1: Determinar matriz de ahorros.

P2. Construir rutas individuales para visitar a cada nodo

Consolidación de rutas

P3: Identificar mayor ahorro de la matriz.

Caso 1. Ningún nodo en ruta existente (consolidada).

*Consolidar los dos nodos en una ruta.***

Eliminar fila y columna asociada.

Eliminar la celda inversa.

Caso 2. Un nodo en ruta – otro sin ruta.

*Agregar nodo a la ruta existente.***

Eliminar fila y columna asociadas.

Caso 3. Los dos nodos en ruta.

3.1 En rutas diferentes.

*Consolidar las dos rutas en una sola.***

Eliminar fila y columna asociadas.

3.2 En la misma ruta

Eliminar celda.

P4. Consolidar rutas y buscar siguiente mayor ahorro (P2)

P5. Termina cuando no se tienen más ahorros disponibles.

***Solo si cumple restricciones, si no, elimina solo celda de ahorro*

Tabla 3.50. Cantidades de mercados a entregar a cada ciudad

Agente	Ubicación	Q (und)	Q (t)	Q (m ³)
BOD	Bogotá	4782	53,740	247,21
A	Barranquilla	209	2,349	10,804
B	Cartagena	224	2,517	11,58
C	Tumaco	46	0,517	2,378
D	P. Carreño	307	3,450	15,87
E	Sincelejo	80	0,899	4,1356
F	Finca Ubo	267	3,001	13,803
G	Florencia	245	2,753	12,665
H	Arauca	320	3,596	16,542
I	Bogotá	172	1,933	8,8915
J	Cali	245	2,753	12,665
K	Medellín	159	1,787	8,2195
L	Tunja	166	1,866	8,5814
M	Pereira	220	2,472	11,373
N	Manizales	95	1,068	4,911
O	Mitú	116	1,304	5,9966
Q	Mocoa	188	2,113	9,7187
T	Inírida	376	4,225	19,437

Para la aplicación del algoritmo, inicialmente se calcula la matriz de costos de viaje entre todas las ciudades. Se debe tener en cuenta la matriz final de distancias de Floyd Warshall (tabla 3.8), las cantidades a enviar en toneladas a cada ciudad (tabla 3.50), el costo de transporte de la empresa

ÑÑ Vehículos de COP 325 COP/t-km y el costo del retorno de un vehículo vacío al CEDI (COP 50 000) (tabla 3.51).

Tabla 3.51A. Costos de transporte entre ciudades (COP)

	BOD	A	B	C	D	E	F	G	H
BOD	0	766 395	879 486	189 849	1 086 512	281 085	1 320 390	759 707	841 501
A	50 000	0	109 629	313 503	2 435 402	89 117	402 748	1 418 299	1 199 140
B	50 000	98 471	0	290 990	2 285 151	49 964	272 075	1 298 392	1 349 909
C	50 000	1 625 917	1 800 696	0	1 670 694	610 089	2 201 951	555 687	2 157 516
D	50 000	1 506 072	1 672 250	250 332	0	564 215	2 265 337	1 029 050	1 553 271
E	50 000	1 249 589	1 397 360	262 261	2 111 354	0	1 937 678	1 145 377	1 581 321
F	50 000	412 204	551 417	252 684	1 985 772	32 725	0	1 094 372	1 654 953
G	50 000	1 185 469	1 328 637	111 389	1 702 090	441 496	1 596 365	0	1 483 146
H	50 000	782 425	948 208	310 647	1 490 170	388 610	1 402 305	1 403 087	0
I	50 000	766 395	879 486	189 849	1 086 512	281 085	1 320 390	759 707	841 501
J	50 000	1 118 295	1 256 642	112 229	1 603 418	415 784	1 769 947	346 298	1 380 296
K	50 000	980 130	1 108 561	183 129	1 633 693	137 913	1 593 440	723 914	1 168 752
L	50 000	658 763	764 130	213 370	1 243 490	261 216	1 182 890	884 983	676 707
M	50 000	1 029 747	1 161 739	147 343	1 473 351	211 252	1 656 826	533 316	1 244 721
N	50 000	989 290	1 118 379	156 248	1 413 923	195 766	1 605 142	580 742	1 182 777
O	50 000	1 204 552	1 349 090	211 858	1 730 122	336 308	1 013 209	535 106	1 512 365
Q	50 000	1 372 487	1 529 078	70 227	1 976 802	513 082	1 835 284	219 232	1 769 491
T	50 000	1 706 067	1 886 599	206 314	293 773	640 768	2 462 323	794 605	1 859 484

Tabla 3.51B. Costos de transporte entre ciudades (COP) (continuación)

	I	J	K	L	M	N	O	Q	T
BOD	0	413 409	284 555	85 487	277 213	101 316	243 188	751 186	1 690 512
A	755 730	1 072 001	450 642	644 486	794 678	337 258	752 866	1 163 858	3 342 572
B	671 550	952 095	372 825	563 244	687 007	290 764	696 094	1 071 848	3 158 552
C	707 358	595 059	938 449	768 170	1 181 974	492 008	516 457	258 177	1 686 392
D	608 730	1 089 898	847 276	672 982	1 055 821	437 533	571 111	957 865	359 800
E	574 179	799 079	273 521	469 269	549 606	231 431	630 425	1 047 129	2 945 693
F	503 820	748 074	241 581	507 465	503 805	212 348	582 973	880 275	2 791 886
G	344 884	904 669	603 372	418 340	718 344	291 805	253 356	168 227	2 444 445
H	451 679	1 056 789	581 304	351 042	854 942	350 790	547 809	1 244 882	2 184 894
I	0	413 409	284 555	85 487	277 213	101 316	243 188	751 186	1 690 512

	I	J	K	L	M	N	O	Q	T
J	289 602	0	552 268	364 987	647 635	261 271	417 318	433 958	2 323 596
K	306 564	377 616	0	255 248	171 149	68 007	449 940	723 720	2 360 675
L	87 949	538 685	245 065	0	389 706	149 892	302 502	847 316	1 882 772
M	216 730	187 019	145 762	294 657	0	18 390	389 355	577 466	2 164 295
N	183 436	234 444	114 983	262 524	42 586	0	366 900	613 858	2 091 511
O	360 589	927 039	617 890	433 497	738 432	300 479	0	578 839	2 478 777
Q	498 794	969 096	745 649	566 881	915 206	376 813	357 156	0	2 260 425
T	773 319	855 453	999 425	831 830	1 266 343	528 440	629 577	777 965	0

Como ejemplo, para determinar el costo de viajar desde la ciudad B hasta la ciudad K, se estaría transportando la cantidad de mercancía requerida en la ciudad K:

$$c_{BK} = d_{BK} * w_K * 325$$

Donde:

$$c_{BK} = \text{costo de viajar desde B hasta K}$$

$$d_{BK} = \text{distancia desde B hasta K en km}$$

$$w_K = \text{Cantidad en toneladas requeridas en la ciudad K}$$

$$c_{BK} = 642 * 1,787 * 325 = \text{COP } 372\,825$$

A continuación, se presentan dos ejemplos más de la determinación de costos de la tabla 3.51: los costos de viajar desde O hasta B, y desde I hasta Q:

$$c_{OB} = d_{OB} * w_B * 325$$

$$c_{OB} = 1649 * 2,517 * 325 = \text{COP } 1\,349\,090$$

$$c_{IQ} = d_{IQ} * w_Q * 325$$

$$c_{IQ} = 1094 * 2,113 * 325 = \text{COP } 751\,186$$

Después, con la determinación de la matriz de costos se procede a definir la matriz de ahorros por medio de la fórmula de ahorro:

$$S_{ij} = c_{iO} + c_{Oj} - c_{ij}$$

Donde S_{ij} corresponde al ahorro en costo por tener una ruta consolidada con los nodos i, j visitados en este orden y O representa el punto de distribución. Con esta fórmula es posible determinar una matriz de ahorros en todo el conjunto de ciudades a visitar (tabla 3.52).

Tabla 3.52A. Matriz de ahorro para el problema de distribución de mercados (COP)

	BOD	A	B	C	D	E	F	G	H
BOD									
A		-	\$ 819 857	-\$ 73 654	-\$ 1 298 890	\$ 241 968	\$ 967 642	-\$ 608 592	-\$ 307 638
B		\$ 717 924	-	-\$ 51 141	-\$ 1 148 639	\$ 281 121	\$ 1 098 316	-\$ 488 685	-\$ 458 407
C		-\$ 809 522	-\$ 871 210	-	-\$ 534 182	-\$ 279 004	-\$ 831 560	\$ 254 020	-\$ 1 266 015
D		-\$ 689 678	-\$ 742 764	-\$ 10 483	-	-\$ 233 130	-\$ 894 947	-\$ 219 343	-\$ 661 770
E		-\$ 433 195	-\$ 467 874	-\$ 22 411	-\$ 974 842	-	-\$ 567 287	-\$ 335 670	-\$ 689 820
F		\$ 404 190	\$ 378 069	-\$ 12 835	-\$ 849 260	\$ 298 360	-	-\$ 284 665	-\$ 763 451
G		-\$ 369 074	-\$ 399 151	\$ 128 460	-\$ 565 578	-\$ 110 411	-\$ 225 975	-	-\$ 591 645
H		\$ 33 970	-\$ 18 723	-\$ 70 798	-\$ 353 658	-\$ 57 525	-\$ 31 915	-\$ 593 380	-
I		\$ 50 000	\$ 50 000	\$ 50 000	\$ 50 000	\$ 50 000	\$ 50 000	\$ 50 000	\$ 50 000
J		-\$ 301 900	-\$ 327 156	\$ 127 620	-\$ 466 906	-\$ 84 699	-\$ 399 557	\$ 463 409	-\$ 488 795
K		-\$ 163 736	-\$ 179 075	\$ 56 720	-\$ 497 180	\$ 193 172	-\$ 223 050	\$ 85 793	-\$ 277 251
L		\$ 157 631	\$ 165 356	\$ 26 479	-\$ 106 978	\$ 69 869	\$ 187 500	-\$ 75 276	\$ 214 794
M		-\$ 213 353	-\$ 232 254	\$ 92 506	-\$ 336 839	\$ 119 833	-\$ 286 436	\$ 276 391	-\$ 353 219
N		-\$ 172 896	-\$ 188 893	\$ 83 602	-\$ 277 411	\$ 135 319	-\$ 234 752	\$ 228 965	-\$ 291 276
O		-\$ 388 158	-\$ 419 605	\$ 27 991	-\$ 593 610	-\$ 5 224	\$ 357 181	\$ 274 601	-\$ 620 864
Q		-\$ 556 093	-\$ 599 592	\$ 169 622	-\$ 840 290	-\$ 181 997	-\$ 464 894	\$ 590 475	-\$ 877 989
T		-\$ 889 673	-\$ 957 114	\$ 33 535	\$ 842 739	-\$ 309 683	-\$ 1 091 933	\$ 15 102	-\$ 967 983

Tabla 3.52B. Matriz de ahorro para el problema de distribución de mercados (COP) (continuación)

	I	J	K	L	M	N	O	Q	T
BOD									
A	-\$ 705 730	-\$ 608 592	-\$ 116 087	-\$ 508 999	-\$ 467 465	-\$ 185 942	-\$ 459 678	-\$ 362 672	-\$ 1 602 060
B	-\$ 621 550	-\$ 488 685	-\$ 38 270	-\$ 427 757	-\$ 359 794	-\$ 139 447	-\$ 402 906	-\$ 270 662	-\$ 1 418 040
C	-\$ 657 358	-\$ 131 650	-\$ 603 895	-\$ 632 683	-\$ 854 760	-\$ 340 692	-\$ 223 269	\$ 543 009	\$ 54 120
D	-\$ 558 730	-\$ 626 488	-\$ 512 721	-\$ 537 495	-\$ 728 608	-\$ 286 217	-\$ 277 923	-\$ 156 679	\$ 1 380 712
E	-\$ 524 179	-\$ 335 670	\$ 61 034	-\$ 333 782	-\$ 222 392	-\$ 80 115	-\$ 337 237	-\$ 245 943	-\$ 1 205 181
F	-\$ 453 820	-\$ 284 665	\$ 92 974	-\$ 371 978	-\$ 176 592	-\$ 61 031	-\$ 289 785	-\$ 79 089	-\$ 1 051 373
G	-\$ 294 884	-\$ 441 259	-\$ 268 817	-\$ 282 853	-\$ 391 131	-\$ 140 488	\$ 39 832	\$ 632 959	-\$ 703 933
H	-\$ 401 679	-\$ 593 380	-\$ 246 750	-\$ 215 555	-\$ 527 729	-\$ 199 474	-\$ 254 621	-\$ 443 695	-\$ 444 382
I	-	\$ 50 000	\$ 50 000	\$ 50 000	\$ 50 000	\$ 50 000	\$ 50 000	\$ 50 000	\$ 50 000
J	-\$ 239 602	-	-\$ 217 714	-\$ 229 500	-\$ 320 421	-\$ 109 955	-\$ 124 129	\$ 367 229	-\$ 583 084
K	-\$ 256 564	\$ 85 793	-	-\$ 119 761	\$ 156 064	\$ 83 309	-\$ 156 752	\$ 77 466	-\$ 620 162
L	-\$ 37 949	-\$ 75 276	\$ 89 489	-	-\$ 62 492	\$ 1 424	-\$ 9 314	-\$ 46 130	-\$ 142 260
M	-\$ 166 730	\$ 276 391	\$ 188 793	-\$ 159 170	-	\$ 132 927	-\$ 96 167	\$ 223 720	-\$ 423 783
N	-\$ 133 436	\$ 228 965	\$ 219 571	-\$ 127 037	\$ 284 627	-	-\$ 73 712	\$ 187 328	-\$ 350 999
O	-\$ 310 589	-\$ 463 630	-\$ 283 335	-\$ 298 011	-\$ 411 219	-\$ 149 163	-	\$ 222 347	-\$ 738 265
Q	-\$ 448 794	-\$ 505 687	-\$ 411 095	-\$ 431 394	-\$ 587 992	-\$ 225 497	-\$ 63 968	-	-\$ 519 913
T	-\$ 723 319	-\$ 392 044	-\$ 664 871	-\$ 696 343	-\$ 939 129	-\$ 377 124	-\$ 336 389	\$ 23 221	-

Para determinar los ahorros de la tabla 3.52 se desarrolló la fórmula de ahorro. Los valores de la diagonal de la matriz no se determinan, dado que un ahorro debe implicar la consolidación de dos nodos.

Los cálculos para determinar algunos de los ahorros de la matriz se presentan a continuación, con base en los datos de la tabla 3.52:

$$S_{KE} = c_{K-BOD} + c_{BOD-E} - c_{KE}$$

$$S_{KE} = 50000 + 281085 - 137913 \\ = COP 193 712$$

$$S_{TH} = c_{T-BOD} + c_{BOD-H} - c_{TH}$$

$$S_{TH} = 50000 + 841501 - 1859484 \\ = COP - 967 983$$

$$S_{LN} = c_{L-BOD} + c_{BOD-N} - c_{LN}$$

$$S_{LN} = 50000 + 101316 - 149892 = COP 1424$$

El procedimiento para construir las rutas entre las ciudades se basa en la matriz de ahorros (tabla 3.52). Inicialmente, se selecciona el mayor valor de ahorro de toda la matriz, que corresponde a consolidar una ruta con el arco D–T, la cual tiene un valor de COP 1 380 712. Adicionalmente, se verifica la restricción de capacidad de los vehículos al tener a estos dos clientes en una misma ruta (tabla 3.53).

Tabla 3.53. Primera consolidación del algoritmo de Clarke & Wright

Ruta 1	BOD	D	T	BOD	Total
	Bodega	P. Carreño	Inírida	Bodega	
Mercados (und)		307	376		633
Peso (t)		3450	4225		7675
Volumen (m ³)		15 870	19 437		35 307

Dado que la capacidad de los vehículos es de 25 t y 150 m³, se puede hacer la consolidación de la ruta. Siguiendo el procedimiento de Clarke & Wright, se pueden descartar todos los otros ahorros asociados a una ruta que llegue hasta T o salga desde D. Esto se puede asociar a la eliminación de filas y columnas de la matriz de ahorros (tabla 3.54).

Tabla 3.54A. Matriz de ahorro primera iteración (COP)

	BOD	A	B	C	D	E	F	G	H
BOD									
A		-	\$ 819 857	-\$ 73 654	-\$ 1 298 890	\$ 241 968	\$ 967 642	-\$ 608 592	-\$ 307 638
B		\$ 717 924	-	-\$ 51 141	-\$ 1 148 639	\$ 281 121	\$ 1 098 316	-\$ 488 685	-\$ 458 407
C		-\$ 809 522	-\$ 871 210	-	-\$ 534 182	-\$ 279 004	-\$ 831 560	\$ 254 020	-\$ 1 266 015
D									
E		-\$ 433 195	-\$ 467 874	-\$ 22 411	-\$ 974 842	-	-\$ 567 287	-\$ 335 670	-\$ 689 820
F		\$ 404 190	\$ 378 069	-\$ 12 835	-\$ 849 260	\$ 298 360	-	-\$ 284 665	-\$ 763 451
G		-\$ 369 074	-\$ 399 151	\$ 128 460	-\$ 565 578	-\$ 110 411	-\$ 225 975	-	-\$ 591 645
H		\$ 33 970	-\$ 18 723	-\$ 70 798	-\$ 353 658	-\$ 57 525	-\$ 31 915	-\$ 593 380	-
I		\$ 50 000	\$ 50 000	\$ 50 000	\$ 50 000	\$ 50 000	\$ 50 000	\$ 50 000	\$ 50 000
J		-\$ 301 900	-\$ 327 156	\$ 127 620	-\$ 466 906	-\$ 84 699	-\$ 399 557	\$ 463 409	-\$ 488 795
K		-\$ 163 736	-\$ 179 075	\$ 56 720	-\$ 497 180	\$ 193 172	-\$ 223 050	\$ 85 793	-\$ 277 251
L		\$ 157 631	\$ 165 356	\$ 26 479	-\$ 106 978	\$ 69 869	\$ 187 500	-\$ 75 276	\$ 214 794
M		-\$ 213 353	-\$ 232 254	\$ 92 506	-\$ 336 839	\$ 119 833	-\$ 286 436	\$ 276 391	-\$ 353 219
N		-\$ 172 896	-\$ 188 893	\$ 83 602	-\$ 277 411	\$ 135 319	-\$ 234 752	\$ 228 965	-\$ 291 276
O		-\$ 388 158	-\$ 419 605	\$ 27 991	-\$ 593 610	-\$ 5 224	\$ 357 181	\$ 274 601	-\$ 620 864
Q		-\$ 556 093	-\$ 599 592	\$ 169 622	-\$ 840 290	-\$ 181 997	-\$ 464 894	\$ 590 475	-\$ 877 989
T		-\$ 889 673	-\$ 957 114	\$ 33 535		-\$ 309 683	-\$ 1 091 933	\$ 15 102	-\$ 967 983

Tabla 3.54B. Matriz de ahorro primera iteración (COP) (continuación)

	I	J	K	L	M	N	O	Q	T
BOD									
A	-\$ 705 730	-\$ 608 592	-\$ 116 087	-\$ 508 999	-\$ 467 465	-\$ 185 942	-\$ 459 678	-\$ 362 672	
B	-\$ 621 550	-\$ 488 685	-\$ 38 270	-\$ 427 757	-\$ 359 794	-\$ 139 447	-\$ 402 906	-\$ 270 662	
C	-\$ 657 358	-\$ 131 650	-\$ 603 895	-\$ 632 683	-\$ 854 760	-\$ 340 692	-\$ 223 269	\$ 543 009	
D									
E	-\$ 524 179	-\$ 335 670	\$ 61 034	-\$ 333 782	-\$ 222 392	-\$ 80 115	-\$ 337 237	-\$ 245 943	
F	-\$ 453 820	-\$ 284 665	\$ 92 974	-\$ 371 978	-\$ 176 592	-\$ 61 031	-\$ 289 785	-\$ 79 089	
G	-\$ 294 884	-\$ 441 259	-\$ 268 817	-\$ 282 853	-\$ 391 131	-\$ 140 488	\$ 39 832	\$ 632 959	
H	-\$ 401 679	-\$ 593 380	-\$ 246 750	-\$ 215 555	-\$ 527 729	-\$ 199 474	-\$ 254 621	-\$ 443 695	
I	-	\$ 50 000	\$ 50 000	\$ 50 000	\$ 50 000	\$ 50 000	\$ 50 000	\$ 50 000	
J	-\$ 239 602	-	-\$ 217 714	-\$ 229 500	-\$ 320 421	-\$ 109 955	-\$ 124 129	\$ 367 229	
K	-\$ 256 564	\$ 85 793	-	-\$ 119 761	\$ 156 064	\$ 83 309	-\$ 156 752	\$ 77 466	
L	-\$ 37 949	-\$ 75 276	\$ 89 489	-	-\$ 62 492	\$ 1 424	-\$ 9 314	-\$ 46 130	
M	-\$ 166 730	\$ 276 391	\$ 188 793	-\$ 159 170	-	\$ 132 927	-\$ 96 167	\$ 223 720	
N	-\$ 133 436	\$ 228 965	\$ 219 571	-\$ 127 037	\$ 284 627	-	-\$ 73 712	\$ 187 328	
O	-\$ 310 589	-\$ 463 630	-\$ 283 335	-\$ 298 011	-\$ 411 219	-\$ 149 163	-	\$ 222 347	
Q	-\$ 448 794	-\$ 505 687	-\$ 411 095	-\$ 431 394	-\$ 587 992	-\$ 225 497	-\$ 63 968	-	
T	-\$ 723 319	-\$ 392 044	-\$ 664 871	-\$ 696 343	-\$ 939 129	-\$ 377 124	-\$ 336 389	\$ 23 221	

Para la segunda iteración se seleccionó el siguiente mayor ahorro de la matriz obtenida (tabla 3.54), correspondiente a la consolidación de las rutas con los nodos B y F con un valor de COP 1 098 316. De igual manera, se evalúa la capacidad del vehículo como se presenta en la tabla 3.55.

Tabla 3.55. Segunda consolidación del algoritmo de Clarke & Wright

Ruta 2	BOD	B	F	BOD	Total
	Bodega	Cartagena	F. Ubo	Bodega	
Mercados (und)		224	267		491
Peso (t)		2517	3000		5517
Volumen (m ³)		11 579	13 802		25 382

Tras consolidar las rutas B-F, se eliminan las filas y columnas asociadas en la matriz de ahorros y se selecciona nuevamente el mayor ahorro obtenido (tabla 3.56).

Tabla 3.56A. Matriz de ahorro segunda iteración (COP)

	BOD	A	B	C	D	E	F	G	H
BOD									
A		-	\$ 819 857	-\$ 73 654	-\$ 1 298 890	\$ 241 968		-\$ 608 592	-\$ 307 638
B									
C		-\$ 809 522	-\$ 871 210	-	-\$ 534 182	-\$ 279 004		\$ 254 020	-\$ 1 266 015
D									
E		-\$ 433 195	-\$ 467 874	-\$ 22 411	-\$ 974 842	-		-\$ 335 670	-\$ 689 820
F		\$ 404 190		-\$ 12 835	-\$ 849 260	\$ 298 360		-\$ 284 665	-\$ 763 451
G		-\$ 369 074	-\$ 399 151	\$ 128 460	-\$ 565 578	-\$ 110 411		-	-\$ 591 645
H		\$ 33 970	-\$ 18 723	-\$ 70 798	-\$ 353 658	-\$ 57 525		-\$ 593 380	-
I		\$ 50 000	\$ 50 000	\$ 50 000	\$ 50 000	\$ 50 000		\$ 50 000	\$ 50 000
J		-\$ 301 900	-\$ 327 156	\$ 127 620	-\$ 466 906	-\$ 84 699		\$ 463 409	-\$ 488 795
K		-\$ 163 736	-\$ 179 075	\$ 56 720	-\$ 497 180	\$ 193 172		\$ 85 793	-\$ 277 251
L		\$ 157 631	\$ 165 356	\$ 26 479	-\$ 106 978	\$ 69 869		-\$ 75 276	\$ 214 794
M		-\$ 213 353	-\$ 232 254	\$ 92 506	-\$ 336 839	\$ 119 833		\$ 276 391	-\$ 353 219
N		-\$ 172 896	-\$ 188 893	\$ 83 602	-\$ 277 411	\$ 135 319		\$ 228 965	-\$ 291 276
O		-\$ 388 158	-\$ 419 605	\$ 27 991	-\$ 593 610	-\$ 5 224		\$ 274 601	-\$ 620 864
Q		-\$ 556 093	-\$ 599 592	\$ 169 622	-\$ 840 290	-\$ 181 997		\$ 590 475	-\$ 877 989
T		-\$ 889 673	-\$ 957 114	\$ 33 535		-\$ 309 683		\$ 15 102	-\$ 967 983

Tabla 3.56B. Matriz de ahorro segunda iteración (COP) (continuación)

	I	J	K	L	M	N	O	Q	T
BOD									
A	-\$ 705 730	-\$ 608 592	-\$ 116 087	-\$ 508 999	-\$ 467 465	-\$ 185 942	-\$ 459 678	-\$ 362 672	
B									
C	-\$ 657 358	-\$ 131 650	-\$ 603 895	-\$ 632 683	-\$ 854 760	-\$ 340 692	-\$ 223 269	\$ 543 009	
D									
E	-\$ 524 179	-\$ 335 670	\$ 61 034	-\$ 333 782	-\$ 222 392	-\$ 80 115	-\$ 337 237	-\$ 245 943	
F	-\$ 453 820	-\$ 284 665	\$ 92 974	-\$ 371 978	-\$ 176 592	-\$ 61 031	-\$ 289 785	-\$ 79 089	
G	-\$ 294 884	-\$ 441 259	-\$ 268 817	-\$ 282 853	-\$ 391 131	-\$ 140 488	\$ 39 832	\$ 632 959	
H	-\$ 401 679	-\$ 593 380	-\$ 246 750	-\$ 215 555	-\$ 527 729	-\$ 199 474	-\$ 254 621	-\$ 443 695	
I	-	\$ 50 000	\$ 50 000	\$ 50 000	\$ 50 000	\$ 50 000	\$ 50 000	\$ 50 000	
J	-\$ 239 602	-	-\$ 217 714	-\$ 229 500	-\$ 320 421	-\$ 109 955	-\$ 124 129	\$ 367 229	
K	-\$ 256 564	\$ 85 793	-	-\$ 119 761	\$ 156 064	\$ 83 309	-\$ 156 752	\$ 77 466	
L	-\$ 37 949	-\$ 75 276	\$ 89 489	-	-\$ 62 492	\$ 1 424	-\$ 9 314	-\$ 46 130	
M	-\$ 166 730	\$ 276 391	\$ 188 793	-\$ 159 170	-	\$ 132 927	-\$ 96 167	\$ 223 720	
N	-\$ 133 436	\$ 228 965	\$ 219 571	-\$ 127 037	\$ 284 627	-	-\$ 73 712	\$ 187 328	
O	-\$ 310 589	-\$ 463 630	-\$ 283 335	-\$ 298 011	-\$ 411 219	-\$ 149 163	-	\$ 222 347	
Q	-\$ 448 794	-\$ 505 687	-\$ 411 095	-\$ 431 394	-\$ 587 992	-\$ 225 497	-\$ 63 968	-	
T	-\$ 723 319	-\$ 392 044	-\$ 664 871	-\$ 696 343	-\$ 939 129	-\$ 377 124	-\$ 336 389	\$ 23 221	

Para la siguiente iteración, el mayor ahorro identificado es de COP 819 857, donde se consolida la ruta que une al nodo A con el nodo B. Dado que el nodo B ya se encuentra en una ruta con F, se actualiza la ruta y se verifican las capacidades (tabla 3.57).

Tabla 3.57. Tercera consolidación del método Clarke & Wright

	BOD	A	B	F	BOD	
	Bodega	Barranquilla	Cartagena	F. Ubo	Bodega	Total
Mercados		209	224	267		700
Peso (t)		2 348 742	2517	3000		7866
Volumen (m ³)		10 804 255	11 579	13 802		36 186

El procedimiento se continúa desarrollando de la misma manera en la consolidación de nuevas rutas. Los resultados de las iteraciones se presentan en la tabla 3.58.

Tabla 3.58. Seis primeras iteraciones del algoritmo de Clarke & Wright

Iteración	Ahorro seleccionado	Rutas	Mercados (und)	Peso (t)	Volumen (m ³)	Observación
1	D - T	BOD - D - T - BOD	683	7,675	35,307	Consolida
2	B - F	BOD - D - T - BOD	683	7,675	35,307	Consolida
		BOD - B - F - BOD	491	5,517	25,382	
3	A - B	BOD - D - T - BOD	683	7,675	35,307	Consolida
		BOD - A - B - F - BOD	700	7,866	36,186	
4	G - Q	BOD - D - T - BOD	683	7,675	35,307	Consolida
		BOD - A - B - F - BOD	700	7,866	36,186	
5	J - G	BOD - G - Q - BOD	433	4,866	22,383	Consolida
		BOD - D - T - BOD	683	7,675	35,307	
6	F - A	BOD - A - B - F - BOD	700	7,866	36,186	No consolida - Nodos ya existentes en la misma ruta
		BOD - J - G - Q - BOD	678	7,619	35,049	

En la sexta iteración del método de Clarke & Wright, el ahorro de mayor valor es COP 404 190, correspondiente a la consolidación de F – A. Sin embargo, estos dos nodos ya se encuentran en la segunda ruta, por lo que no hay cambios en las rutas y en la matriz de ahorros solo se eliminará la celda F – A. Así, se obtiene una matriz de ahorros actualizada (tabla 3.59).

Tabla 3.59A. Matriz de ahorro séptima iteración (COP)

	BOD	A	B	C	D	E	F	G	H
BOD									
A									
B									
C		-\$ 809 522		-	-\$ 534 182	-\$ 279 004			-\$ 1 266 015
D									
E		-\$ 433 195		-\$ 22 411	-\$ 974 842	-			-\$ 689 820
F		X		-\$ 12 835	-\$ 849 260	\$ 298 360			-\$ 763 451
G									
H		\$ 33 970		-\$ 70 798	-\$ 353 658	-\$ 57 525			-
I		\$ 50 000		\$ 50 000	\$ 50 000	\$ 50 000			\$ 50 000
J									
K		-\$ 163 736		\$ 56 720	-\$ 497 180	\$ 193 172			-\$ 277 251
L		\$ 157 631		\$ 26 479	-\$ 106 978	\$ 69 869			\$ 214 794
M		-\$ 213 353		\$ 92 506	-\$ 336 839	\$ 119 833			-\$ 353 219
N		-\$ 172 896		\$ 83 602	-\$ 277 411	\$ 135 319			-\$ 291 276
O		-\$ 388 158		\$ 27 991	-\$ 593 610	-\$ 5 224			-\$ 620 864
Q		-\$ 556 093	-\$ 599 592	\$ 169 622	-\$ 840 290	-\$ 181 997			-\$ 877 989
T		-\$ 889 673	-\$ 957 114	\$ 33 535		-\$ 309 683			-\$ 967 983

Tabla 3.59B. Matriz de ahorro séptima iteración (COP) (continuación)

	I	J	K	L	M	N	O	Q	T
BOD									
A									
B									
C	-\$ 657 358	-\$ 131 650	-\$ 603 895	-\$ 632 683	-\$ 854 760	-\$ 340 692	-\$ 223 269		
D									
E	-\$ 524 179	-\$ 335 670	\$ 61 034	-\$ 333 782	-\$ 222 392	-\$ 80 115	-\$ 337 237		
F	-\$ 453 820	-\$ 284 665	\$ 92 974	-\$ 371 978	-\$ 176 592	-\$ 61 031	-\$ 289 785		
G									
H	-\$ 401 679	-\$ 593 380	-\$ 246 750	-\$ 215 555	-\$ 527 729	-\$ 199 474	-\$ 254 621		
I	-	\$ 50 000	\$ 50 000	\$ 50 000	\$ 50 000	\$ 50 000	\$ 50 000		

	I	J	K	L	M	N	O	Q	T
J									
K	-\$ 256 564	\$ 85 793	-	-\$ 119 761	\$ 156 064	\$ 83 309	-\$ 156 752		
L	-\$ 37 949	-\$ 75 276	\$ 89 489	-	-\$ 62 492	\$ 1 424	-\$ 9 314		
M	-\$ 166 730	\$ 276 391	\$ 188 793	-\$ 159 170	-	\$ 132 927	-\$ 96 167		
N	-\$ 133 436	\$ 228 965	\$ 219 571	-\$ 127 037	\$ 284 627	-	-\$ 73 712		
O	-\$ 310 589	-\$ 463 630	-\$ 283 335	-\$ 298 011	-\$ 411 219	-\$ 149 163	-		
Q	-\$ 448 794	-\$ 505 687	-\$ 411 095	-\$ 431 394	-\$ 587 992	-\$ 225 497	-\$ 63 968		
T	-\$ 723 319	-\$ 392 044	-\$ 664 871	-\$ 696 343	-\$ 939 129	-\$ 377 124	-\$ 336 389		

Las iteraciones del método de Clarke & Wright continúan hasta no disponer de ahorros positivos para la consolidación de rutas. En cada una de las iteraciones se considera que si se incumplen las restricciones de capacidad o si los nodos ya se encuentran en una misma ruta, solo se descarta el ahorro de la celda y no se consolidan rutas (tabla 3.60).

Tabla 3.60. Iteraciones del algoritmo de Clarke & Wright

Iteración	Ahorro seleccionado	Rutas	Mercados (und)	Peso (t)	Volumen (m ³)	Observación
7	F - E	BOD - D - T - BOD	683	7,675	35,307	Consolida
		BOD - A - B - F - E - BOD	780	8,765	40,322	
		BOD - J - G - Q - BOD	678	7,619	35,049	
8	N - M	BOD - D - T - BOD	683	7,675	35,307	Consolida
		BOD - A - B - F - E - BOD	780	8,765	40,322	
		BOD - J - G - Q - BOD	678	7,619	35,049	
		BOD - N - M - BOD	315	3,539	16,283	
9	M - J	BOD - D - T - BOD	683	7,675	35,307	Consolida
		BOD - A - B - F - E - BOD	780	8,765	40,322	
		BOD - N - M - J - G - Q - BOD	993	11,159	51,333	
10	L - H	BOD - D - T - BOD	683	7,675	35,307	Consolida
		BOD - A - B - F - E - BOD	780	8,765	40,322	
		BOD - N - M - J - G - Q - BOD	993	11,159	51,333	
		BOD - L - H - BOD	243	5,461	25,123	
11	Q - C	BOD - D - T - BOD	683	7,675	35,307	Consolida
		BOD - A - B - F - E - BOD	780	8,765	40,322	
		BOD - N - M - J - G - Q - C - BOD	1039	11,676	53,711	
		BOD - L - H - BOD	243	5,461	25,123	

Iteración	Ahorro seleccionado	Rutas	Mercados (und)	Peso (t)	Volumen (m ³)	Observación
12	K - N	BOD - D - T - BOD	683	7,675	35,307	Consolida
		BOD - A - B - F - E - BOD	780	8,765	40,322	
		BOD - K - N - M - J - G - Q - C - BOD	1198	13,463	61,930	
		BOD - L - H - BOD	243	5,461	25,123	
13	E - K	BOD - D - T - BOD	683	7,675	35,307	Consolida
		BOD - A - B - F - E - K - N - M - J - G - Q - C - BOD	1978	22,228	102,252	
		BOD - L - H - BOD	243	5,461	25,123	
14	I - D	BOD - I - D - T - BOD	855	9,608	44,199	Consolida
		BOD - A - B - F - E - K - N - M - J - G - Q - C - BOD	1978	22,228	102,252	
		BOD - L - H - BOD	243	5,461	25,123	
15	H - A	BOD - I - D - T - BOD	855	9,608	44,199	No consolida por exceder capacidad
		BOD - A - B - F - E - K - N - M - J - G - Q - C - BOD	1978	22,228	102,252	
		BOD - L - H - BOD	243	5,461	25,123	
16		BOD - I - D - T - BOD	855	9,608	44,199	Asignación
		BOD - A - B - F - E - K - N - M - J - G - Q - C - BOD	1978	22,228	102,252	
		BOD - L - H - BOD	243	5,461	25,123	
		BOD - O - BOD	116	1,303	5,996	

En la novena iteración, el ahorro seleccionado es M - J. Dado que las dos ciudades se encuentran en rutas diferentes, en este caso se consolidaron las dos rutas en una sola por cuanto no superan las restricciones de capacidad. Esta consolidación se hace respetando el orden encontrado en el ahorro: siempre debe ir primero M y después J. De igual manera ocurre en la iteración 13, donde el ahorro E - K genera la consolidación de dos rutas.

En la iteración 15 se identifica un ahorro entre H y A. Sin embargo, al consolidar las dos rutas que unen estos dos nodos, se supera la capacidad de 25 t que tienen los vehículos, por lo que no se consolidan y tan solo se descarta este ahorro. Después de la iteración 15, los ahorros restantes de la matriz tienen valores negativos y la ciudad O no se encuentra dentro de las rutas consolidadas. Por lo tanto, se genera una ruta exclusiva para visitar esta ciudad, como se observa en la iteración 16.

Tabla 3.61. Matriz de distancias entre puntos de la ciudad

	HZ	A	B	C	D	E	F	G
HZ	0	560	246	640	1324	707	730	346
A	189	0	435	287	764	896	913	535
B	566	1126	0	394	1244	461	484	100
C	393	953	562	0	1717	1023	626	662
D	311	122	557	409	0	520	770	657
E	713	905	882	320	783	0	250	449
F	580	1140	749	187	1196	413	0	199
G	1074	1266	954	681	1144	361	611	0

Tabla 3.62. Cantidad de mercados requeridos por punto en la localidad

Letra	Ubicación	Q (und)
HZ	Usaquén	
A	Engativá	64
B	Kennedy	258
C	Suba	503
D	Chapinero	97
E	Bosa	76
F	Soacha	487
G	Usme	131

Ejercicio de aplicación 3.5

Para desarrollar la distribución dentro de la ciudad se conoce la matriz de distancias mínimas entre cada una de las localidades y la cantidad de mercados que requiere cada uno de los puntos en un pedido (tablas 3.61 y 3.62).

Identifique el conjunto de rutas para desarrollar la distribución dentro de la ciudad minimizando la distancia recorrida con el método de Clarke & Wright. Los vehículos de transporte en la ciudad tienen una capacidad para transportar 900 unidades y el punto de distribución se encuentra en Usaquén.

Ejercicio 3.6

Organización de ayudas en un almacén

Solución ejercicio 3.6

Organización de bodega por el índice COI

Cada uno de los productos que componen un mercado son recibidos en una bodega del CEDI de Bogotá. Para la organización de la bodega, primero se identifica la cantidad de productos a almacenar en el CEDI, los cuales están dados por la cantidad de pedido. Los espacios utilizados por cada producto en la bodega, la frecuencia de pedido en la bodega y el volumen unitario se presentan en la tabla 3.63.

Tabla 3.63. Características de los productos a almacenar

	Producto	Can. por mercado	Q (und)	N.º veces a alistar al mes	Volumen m ³ /und	N.º espacios req.
A	Atún	1	4782	26	0,00066	4
B	Gaseosa	2	9564	20	0,00032	4
C	Bienestarina	1	4782	45	0,00408	20
D	Palomitas de maíz	1	4782	20	0,00171	9
E	Galletas	2	9564	70	0,00154	15
F	Dulces	1	4782	7	0,0015	8
G	Nachos	3	14346	45	0,00055	8
H	Papas fritas	2	9564	70	0,002142	21
I	Agua	2	9564	31	0,00035	4
J	Achiras	2	9564	40	0,001331	13
K	Chocolates	3	14346	83	0,001155	17
L	Gomas anaconda	1	4782	11	0,000968	5
M	Chocorramo	2	9564	200	0,0057	55
N	Bebida malta	3	14346	51	0,001134	17
O	Arequipe	1	4782	30	0,00646	31
P	Maíz procesado	1	4782	41	0,000585	3
Q	Chitos	2	9564	51	0,0003	3
R	Maní	1	4782	41	0,000495	3
S	Snickers	1	4782	60	0,001326	7
T	Cerveza	1	4782	29	0,002028	10

La cantidad de productos de cada tipo se obtiene teniendo en cuenta el tamaño del pedido de mercados en la bodega del CEDI (4782 mercados). Este valor se multiplica por la cantidad de unidades que tiene un mercado para obtener el valor presentado en la columna Q (*und*) de la tabla 3.63.

La cantidad de espacios de almacenamiento requeridos se determina identificando el volumen total del pedido del producto y distribuyéndolo en los *racks* con capacidad de un m^3 :

$$\# \text{ espacios} = \frac{\text{Cantidad a almacenar del producto} * \text{Volumen producto}}{\text{Volumen rack}}$$

$$\# \text{ espacios}_{Doritos} = \frac{4782 * 0,000585}{1} = 2,797$$

$$\approx 3 \text{ espacios}$$

$$\# \text{ espacios}_{GomasAnaconda} = \frac{4782 * 0,000968}{1}$$

$$= 4,628 \approx 5 \text{ espacios}$$

Posteriormente, se diseña la bodega teniendo en cuenta las características de los *racks* a comprar y los espacios entre pasillos planteados. La estructura de la bodega que cumple con los requisitos planteados se presenta en las figuras 3.7 y 3.8, las cuales fueron diseñadas mediante el *software* Warehouse Planner (Baumann, s. f.)

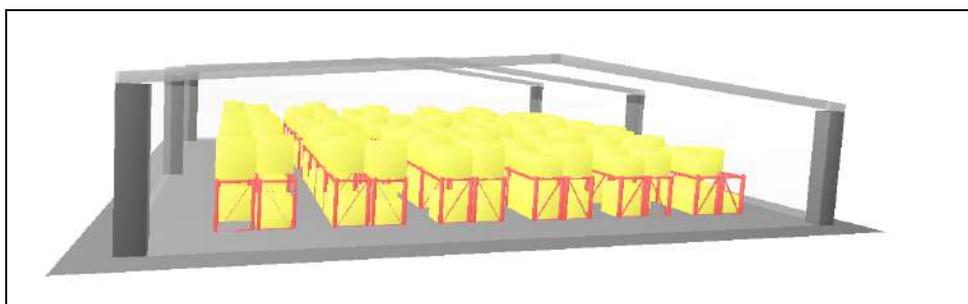


Figura 3.7. Diseño 3D del almacén.



Figura 3.8. Diseño de bodega para almacenamiento de mercados.

Para cada uno de los productos se determina el cube-per-order index (COI), el cual se encuentra en función de la cantidad de espacio ocupado por los productos y la cantidad de veces que se debe pedir (tabla 3.64).

Tabla 3.64. Determinación del COI por producto

Cod.	Producto	N.º espacios	COI	Orden de asignación
A	Atún	4	0,1538	6
B	Gaseosa	4	0,2000	8
C	Bienestarina	20	0,4444	16
D	Palomitas de maíz	9	0,4500	17
E	Galletas	15	0,2143	10
F	Dulces	8	1,1429	20
G	Nachos	8	0,1778	7
H	Papas fritas	21	0,3000	12
I	Agua	4	0,1290	5
J	Achiras	13	0,3250	13
K	Chocolates	17	0,2048	9
L	Gomas anaconda	5	0,4545	18
M	Chocorrano	55	0,2750	11
N	Bebida malta	17	0,3333	14
O	Arequipe	31	1,0333	19
P	Maíz procesado	3	0,0732	2
Q	Chitos	3	0,0588	1
R	Maní	3	0,0732	3
S	Snickers	7	0,1167	4
T	Cerveza	10	0,3448	15

El cálculo del COI para algunos de los productos es el siguiente:

$$COI_i = \frac{\text{Volumen promedio requerido para el almacenamiento}}{\text{Número de ordenes en promedio que aparece el producto}}$$

$$COI_{GomasAnaconda} = \frac{5}{11} = 0,4545$$

$$COI_{chitos} = \frac{3}{51} = 0,0588$$

Con los valores del índice COI, la ubicación de los productos se hace en orden. El producto con menor índice se ubica más cerca de la zona de alistamiento, mientras el de mayor valor se ubica más alejado de esta zona, como se presenta el *ranking* en la columna *Orden de asignación* de la tabla 3.64. La propuesta de organización de los productos en la bodega se muestra en las figuras 3.9 y 3.10 (nivel 1 y nivel 2).

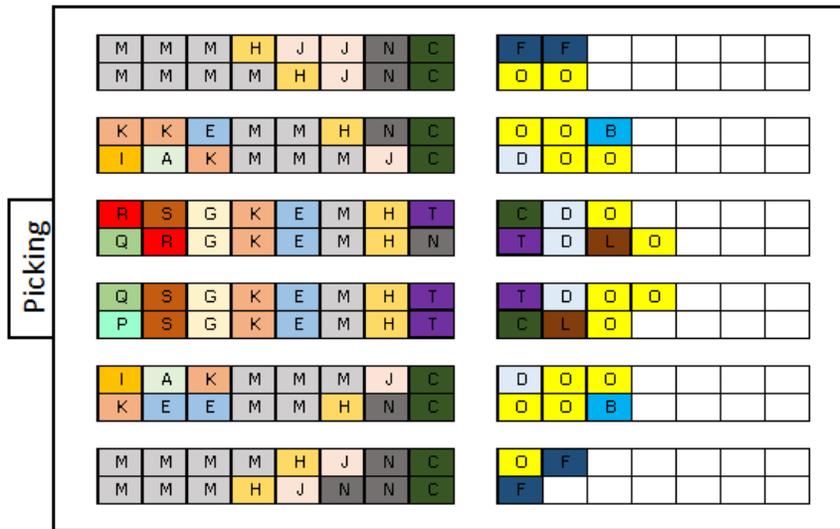


Figura 3.9. Asignación de los productos al nivel 1 de los racks.

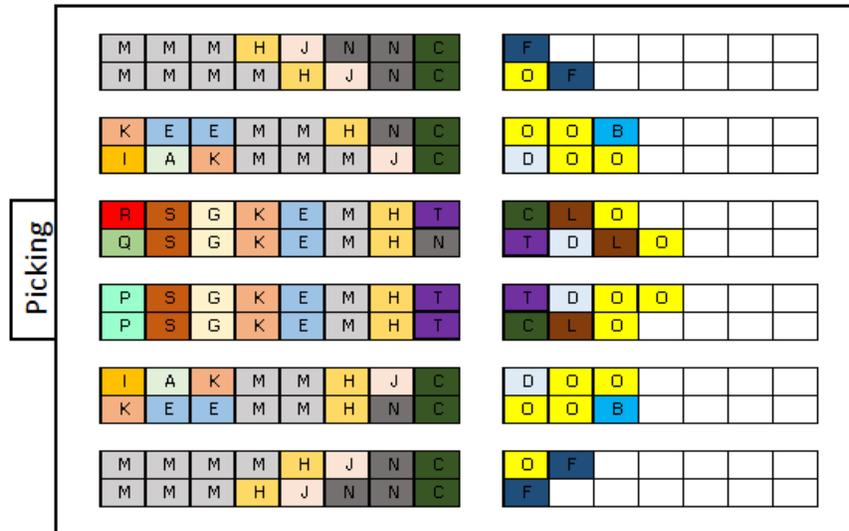


Figura 3.10. Asignación de los productos al nivel 2 de los racks.

La figura presenta dos niveles debido a que la estantería seleccionada tiene dos niveles de altura, lo que permite colocar unos productos sobre los otros. El producto más cercano a la zona de *picking* es el Q, dado que tiene el menor índice COI y tiene el valor de 1 en el *ranking* de ubicación. Los productos F y O son los que se ubican más lejos de la zona de alistamiento.

Ejercicio de aplicación 3.6

Para la siguiente bodega se desea organizar un conjunto de productos por medio del indicador COI. De los productos se conoce la cantidad de m³ requeridos para almacenarlos, la cantidad a almacenar y la frecuencia (cantidad de veces que se piden al mes) (tabla 3.65, figura 3.11).

Tabla 3.65. Características de los productos a almacenar

	Producto	Q (cantidad a almacenar)	N.º veces a alistar al mes	Volumen m ³ por unidad
A	Arroz	93	22	9
B	Lentejas	122	20	17
C	Frijol	52	60	15
D	Atún	26	40	12
E	Galletas	131	32	11
F	Harina de maíz	152	11	7
G	Café	165	56	10

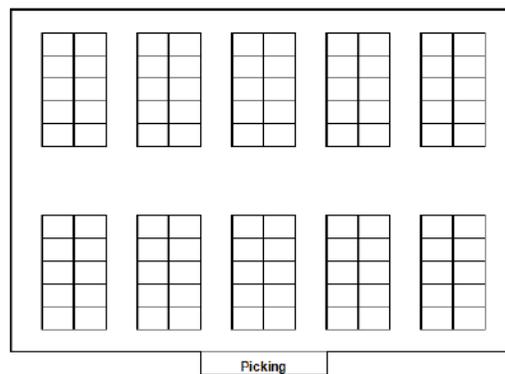


Figura 3.11. Estructura del almacén. En cada espacio se puede almacenar un m³.

Ejercicio 3.7

Transporte de pruebas rápidas para diagnosticar COVID-19⁴

Una empresa extranjera pagada por una organización no gubernamental (ONG) debe transportar las pruebas rápidas para diagnosticar COVID-19 en Leticia, dado que es la ciudad con más casos de contagio. Dicha empresa ha solicitado al equipo técnico del presidente de la Nación que le informe una ruta que le permita el gasto mínimo de combustible para el vehículo que se encargará de transportarlas. Los técnicos han estudiado las posibles rutas para ir desde Bogotá hasta Leticia y han obtenido el mapa de la figura 3.12.

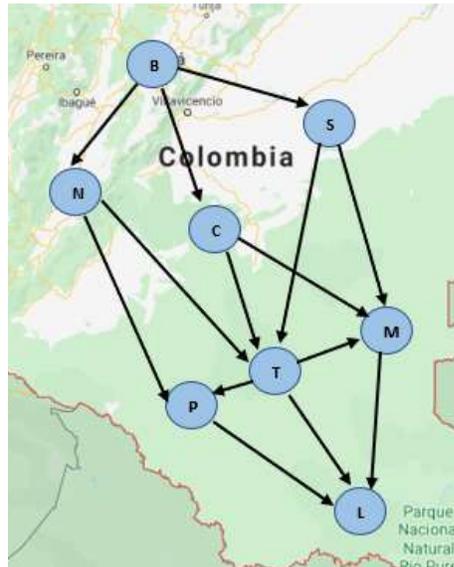


Figura 3.12. Red con vías habilitadas para la distribución.

Teniendo en cuenta lo anterior, la tabla 3.66 presenta el gasto de combustible por cada una de las rutas posibles.

⁴ Este ejercicio fue solucionado en el capítulo 1. En este capítulo se retoma para darle solución a partir de las técnicas y los algoritmos de la logística.

Tabla 3.66. Cantidad de combustible consumido por caminos habilitados

Ciudad origen	Ciudad destino	Gasto de combustible en galones de gasolina
Bogotá (B)	San José del Guaviare (S)	400
	Caquetá (C)	950
	Neiva (N)	800
San José del Guaviare (S)	Mitú (M)	1800
	Tres Islas (T)	900
Caquetá (C)	Mitú (M)	1100
	Tres Islas (T)	600
Neiva (N)	Tres Islas (T)	600
	Putumayo (P)	1200
Mitú (M)	Leticia (L)	400
Tres Islas (T)	Mitú (M)	900
	Putumayo (P)	1000
	Leticia (L)	1300
Putumayo (P)	Leticia (L)	600

Además, se sabe que a veces los grupos armados interceptan las carreteras para pedir combustible a los viajeros. Según información del Ejército Nacional, el paso entre Caquetá y Mitú es uno de los más riesgosos, ya que estos grupos piden hasta 70 galones de gasolina. También se sabe que en el paso entre San José del Guaviare y Tres Islas los coccaleros de la zona obligan a los viajeros a transportar cocaína entre veredas vecinas, en lo que se alcanzan a gastar hasta 35 galones de gasolina adicionales. Determine la ruta que tenga el gasto mínimo de galones de gasolina teniendo en cuenta la información que se proporciona y mencione cuántos galones de gasolina se consumen en esta ruta.

Solución ejercicio 3.7

Para solucionar este problema, existen algoritmos de ruta más corta como Floyd Warshall o Dijkstra. En este caso se solucionará por el método de Floyd Warshall. El primer paso consiste en construir la matriz inicial (tabla 3.67).

Tabla 3.67. Matriz inicial para aplicación del algoritmo Floyd Warshall

	B	S	C	N	M	T	P	L
B	0	400	950	800	∞	∞	∞	∞
S	∞	0	∞	∞	1800	935	∞	∞
C	∞	∞	0	∞	1170	600	∞	∞
N	∞	∞	∞	0	∞	600	1200	∞
M	∞	∞	∞	∞	0	∞	∞	400
T	∞	∞	∞	∞	900	0	1000	1300
P	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0	600
L	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0

En el camino entre Caquetá (C) y Mitú (M) aumenta la cantidad de combustible consumido en 70 para un total de 1170 galones de gasolina. En el camino de San José del Guaviare (S) y Tres Islas (T) se incrementa en 35 galones, para un total de 935 galones por recorrido. Los valores de ∞ que se encuentran en la matriz indican que no hay un camino habilitado. A partir de esta matriz se aplica el algoritmo y los resultados de cada iteración se presentan en la tabla 3.68.

Tabla 3.68. Iteraciones del método Floyd Warshall

	B	S	C	N	M	T	P	L
B	0	400	950	800	∞	∞	∞	∞
S	∞	0	∞	∞	1800	935	∞	∞
C	∞	∞	0	∞	1170	600	∞	∞
N	∞	∞	∞	0	∞	600	1200	∞
M	∞	∞	∞	∞	0	∞	∞	400
T	∞	∞	∞	∞	900	0	1000	1300
P	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0	600
L	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0

Iteración B

	B	S	C	N	M	T	P	L
B	0	400	950	800	2200	1335	∞	∞
S	∞	0	∞	∞	1800	935	∞	∞
C	∞	∞	0	∞	1170	600	∞	∞
N	∞	∞	∞	0	∞	600	1200	∞
M	∞	∞	∞	∞	0	∞	∞	400
T	∞	∞	∞	∞	900	0	1000	1300
P	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0	600
L	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0

Iteración S

	B	S	C	N	M	T	P	L
B	0	400	950	800	2120	1335	∞	∞
S	∞	0	∞	∞	1800	935	∞	∞
C	∞	∞	0	∞	1170	600	∞	∞
N	∞	∞	∞	0	∞	600	1200	∞
M	∞	∞	∞	∞	0	∞	∞	400
T	∞	∞	∞	∞	900	0	1000	1300
P	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0	600
L	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0

Iteración C

	B	S	C	N	M	T	P	L
B	0	400	950	800	2120	1335	2000	∞
S	∞	0	∞	∞	1800	935	∞	∞
C	∞	∞	0	∞	1170	600	∞	∞
N	∞	∞	∞	0	∞	600	1200	∞
M	∞	∞	∞	∞	0	∞	∞	400
T	∞	∞	∞	∞	900	0	1000	1300
P	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0	600
L	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0

Iteración N

	B	S	C	N	M	T	P	L
B	0	400	950	800	2120	1335	2000	2520
S	∞	0	∞	∞	1800	935	∞	2200
C	∞	∞	0	∞	1170	600	∞	1570
N	∞	∞	∞	0	∞	600	1200	∞
M	∞	∞	∞	∞	0	∞	∞	400
T	∞	∞	∞	∞	900	0	1000	1300
P	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0	600
L	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0

Iteración M

	B	S	C	N	M	T	P	L
B	0	400	950	800	2120	1335	2000	2520
S	∞	0	∞	∞	1800	935	1935	2200
C	∞	∞	0	∞	1170	600	1600	1570
N	∞	∞	∞	0	1500	600	1200	1900
M	∞	∞	∞	∞	0	∞	∞	400
T	∞	∞	∞	∞	900	0	1000	1300
P	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0	600
L	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0

Iteración T

	B	S	C	N	M	T	P	L
B	0	400	950	800	2120	1335	2000	2520
S	∞	0	∞	∞	1800	935	1935	2200
C	∞	∞	0	∞	1170	600	1600	1570
N	∞	∞	∞	0	1500	600	1200	1800
M	∞	∞	∞	∞	0	∞	∞	400
T	∞	∞	∞	∞	900	0	1000	1300
P	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0	600
L	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0

Iteración P

	B	S	C	N	M	T	P	L
B	0	400	950	800	2120	1335	2000	2520
S	∞	0	∞	∞	1800	935	1935	2200
C	∞	∞	0	∞	1170	600	1600	1570
N	∞	∞	∞	0	1500	600	1200	1800
M	∞	∞	∞	∞	0	∞	∞	400
T	∞	∞	∞	∞	900	0	1000	1300
P	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0	600
L	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0

Iteración L

Ya que se desea conocer la cantidad de gasolina utilizada para viajar desde Bogotá (B) hasta Leticia (L), se observó el valor en la última iteración de Floyd Warshall y se encontró un resultado de 2520 galones de gasolina.



Respuestas de los ejercicios de aplicación

Contenido

- Capítulo 1
- Capítulo 2
- Capítulo 3

Capítulo 1

Programación lineal

Ejercicio de aplicación 1.1

Para responder al cambio de litros de alcohol recibido se debe modificar la restricción de disponibilidad de tal manera que quede:

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 40\,000$$

Utilidad máxima de COP 4 525 000; 30 000 litros de alcohol para empaquetar; 7500 litros para producir gel; 2500 para producir *spray* personal.

Ejercicio de aplicación 1.2

Al colocar la condición, se debe agregar una nueva restricción como sigue:

$$x_1 - x_2 \leq 0$$

Con esta nueva restricción, el beneficio marginal social adquirido en la inversión de los proyectos es de COP 50 y hay que invertir en los proyectos de pago de arriendos y de préstamos de negocios.

Ejercicio de aplicación 1.3

Se requiere modificar las restricciones que se usaron para hacer que los profesionales descansaran dos turnos consecutivos. Estas modificaciones se plantean así:

$$x_{it} + x_{i1} + x_{i3} = 2 \quad \forall i \text{ y } \forall t$$

$$y_{jt} + x_{j2} + x_{j3} = 2 \quad \forall j \text{ y } \forall t$$

$$z_{kt} + z_{k2} + z_{k3} = 2 \quad \forall i \text{ y } \forall t$$

Con estas nuevas restricciones se mantiene el costo mínimo de contratación por los tres turnos de COP 2 400 000. Sin embargo, la asignación sufre una modificación, como muestra la tabla 4.1.

Tabla 4.1. Asignación de los profesionales de la salud en cada turno

Turno 1	Turno 2	Turno 3
Médico 10	Médico 14	Médico 10
Enfermera 23	Enfermera 22	Enfermera 22
Enfermera 24	Enfermera 23	Enfermera 24
Enfermera 25	Enfermera 26	Enfermera 25
Auxiliar de clínica 9	Auxiliar de clínica 13	Auxiliar de clínica 9
Auxiliar de clínica 10	Auxiliar de clínica 15	Auxiliar de clínica 10
Auxiliar de clínica 11	Auxiliar de clínica 29	Auxiliar de clínica 11
Auxiliar de clínica 12	Auxiliar de clínica 30	Auxiliar de clínica 12
Auxiliar de clínica 16	Auxiliar de clínica 32	Auxiliar de clínica 16
Auxiliar de clínica 17	Auxiliar de clínica 33	Auxiliar de clínica 17

Ejercicio de aplicación 1.4

Al operar el modelo con los datos proporcionados, se encontró que es inviable o no factible. Esto se debe a que la capacidad establecida no permite que se produzcan las unidades que se están demandando. El modelo sugiere producir 1534,52 unidades del traje BioseguridadL33 y 6649,61 unidades del traje BioseguridadL34. De los demás se sugiere producir 0 unidades. Con esta combinación se logra una utilidad máxima de COP 29 615.

Ejercicio de aplicación 1.5

Conjuntos

i son los mayoristas $\{A, B, C, D\}$

j son los centros de distribución de Terqueo $\{E, F\}$

k son las localidades que el distrito quiere atender $\{G, H, I, J\}$

Variables de decisión

x_{ij} es el número de miles de mercados que se envían desde el mayorista i hasta el centro de distribución j

y_{jk} es el número de miles de mercados que se envían desde los centros de distribución j hasta la localidades k

w_{ik} es el número de miles de mercados que se envían desde el mayorista i hasta la localidad k

$z_{jj'}$ es el número de miles de mercados que se envían desde el centro de distribución j hasta el centro de distribución j'

Parámetros

Cap_i es el número de miles de mercados que tiene de capacidad el mayorista i

Dem_k es el número de miles de mercados que demanda la localidad k

C_{ij} es el costo de llevar un mercado desde el mayorista i hasta el centro de distribución j

H_{jk} es el costo de llevar un mercado desde el centro de distribución j hasta la localidad k

M_{ik} es el costo de llevar un mercado desde el mayorista i hasta la localidad k

$P_{jj'}$ es el costo de llevar un mercado entre los centros de distribución j y j'

Modelo matemático

$$\begin{aligned}
 \text{Min}(C) = & \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} x_{ij} C_{ij} \\
 & + \sum_{k \in K} \sum_{j \in J} y_{jk} H_{jk} \\
 & + \sum_{i \in I} \sum_{k \in K} w_{ik} M_{ik} \\
 & + \sum_{j \in J} \sum_{j' \in J'} z_{jj'} P_{jj'}
 \end{aligned}$$

s. a

$$\sum_{j \in J} x_{ij} + \sum_{k \in K} w_{ik} \leq Cap_i \quad \forall i$$

$$\sum_{i \in I} w_{ik} + \sum_{j \in J} y_{jk} \geq Dem_k \quad \forall k$$

$$\sum_{i \in I} x_{ij} + z_{jj'} = z_{jj'} + \sum_{k \in K} y_{jk} \quad \forall j \text{ y } \forall j'$$

Ejercicio de aplicación 1.6

Para responder, se debe ingresar la siguiente restricción:

$$x_{CaquetáMitú} = 0$$

A partir de esto, los nuevos galones de gasolina son 2600 y la ruta debe ser Bogotá, San José del Guaviare, Mitú y Leticia.

Ejercicio de aplicación 1.7

Una de las salidas del código de GAMS es el cuadro del nivel y marginales de las restricciones. En este ejercicio, las restricciones 14, 15, 16 y 17 hacían referencia al nivel del inventario esperado en el mes de diciembre para los dos tipos de vacunas (figura 4.1).

	LOWER	LEVEL	UPPER	MARGINAL
EQU R14	25000.000	25000.000	25000.000	812.500
EQU R15	18400.000	18400.000	18400.000	650.003
EQU R16	16000.000	16000.000	16000.000	812.499
EQU R17	10400.000	10400.000	10400.000	650.000

Figura 4.1. Salida de GAMS para analizar la sensibilidad en cada una de las restricciones

El valor de los marginales positivos indica, por ejemplo, que por cada unidad adicional de AntiCovid-Tipo1 que se desee guardar en la planta de Bogotá en diciembre, aumentaría el costo en COP 812,5. En este sentido, al revisar las cuatro restricciones, se observa que todos los marginales o precio sombra son positivos, lo que sugiere un aumento del costo por cada unidad adicional que se desee almacenar.

Ejercicio de aplicación 1.8

Para iniciar, la función objetivo cambiaría a ser:

$$\begin{aligned}
 \text{Min}(C) = & \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \sum_{k \in K} y_{ijk} C_k + \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} x_{ij} Op_i \\
 & + \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \sum_{l \in L} z_{ijl} C_{ijl} \\
 & + \sum_{i \in I} \sum_{l \in L} \sum_{m \in M} w_{ilm} C_{ilm}
 \end{aligned}$$

Y las siguientes restricciones pasarían a ser:

$$\sum_{i \in I} z_{ijl} - \sum_{m \in M} w_{ilm} = 0 \quad \forall j$$

Ejercicio de aplicación 1.9

El valor máximo de la suma del índice de prioridad de las familias beneficiadas por los mercados a entregar es 26948, que corresponde al valor óptimo del modelo de programación lineal operado.

Ejercicio de aplicación 1.10

El valor máximo de la suma del índice de prioridad de las familias beneficiadas por los mercados a entregar es 23414, que corresponde al valor óptimo del modelo de programación lineal operado.

Ejercicio de aplicación 1.11

Valor óptimo: COP 178 376 400.

Ejercicio de aplicación 1.12

a) Valor óptimo: el nivel de satisfacción mensual total, a causa de los alimentos comprados es 4651,2 unidades de satisfacción.

b) **Valor óptimo:** el nivel de satisfacción mensual total a causa de los alimentos comprados es 2679,2 unidades de satisfacción.

Ejercicio de aplicación 1.13

Valor óptimo: 10 664 990 familias.

Capítulo 2

Cadenas de Markov

Ejercicio de aplicación 2.1

- b) 0,98
- c) 0,84
- d) Matriz de probabilidades de transición un paso adelante:

Tabla 4.2. Matriz de probabilidades

	0	1	2
0	0,020	0,260	0,720
1	0,025	0,300	0,675
2	0,030	0,340	0,630

Ejercicio de aplicación 2.2

- c) $m(3,3) = 1,79$ días
- d) $m(0,3) = 1,77$ días. Representa el número esperado de días desde que no fue ninguno a laborar hasta que coincidan los tres laborando un mismo día.

Ejercicio de aplicación 2.3

- a) 47813,6 de las 400 000 personas

Ejercicio de aplicación 2.4

- b) 3,0 personas
- c) 99/754

Ejercicio de aplicación 2.5

- b) 44,95 %
- c) 20,42 días

Ejercicio de aplicación 2.6

- b) 81,6 %

Capítulo 3

Logística

Ejercicio de aplicación 3.1

Matriz de distancias finales

Tabla 4.3. Matriz distancias mínimas

	A	B	C	D	E	F	G	H
A	0	560	246	640	1324	707	730	346
B	189	0	435	287	764	896	913	535
C	566	1126	0	394	1244	461	484	100
D	393	953	562	0	1717	1023	626	662
E	311	122	557	409	0	520	770	657
F	713	905	882	320	783	0	250	449
G	580	1140	749	187	1196	413	0	199
H	1074	1266	954	681	1144	361	611	0

Distancia F – A: 713

Ejercicio de aplicación 3.2

Tabla 4.4. Costos de distribución

	Costos de envío (COP)						Costo distribución (COP)	Costo apertura (COP)	Costo total (COP)
	A2	B3	D4	E5	F6	G7			
F2A6	0	60	80	51	0	140	331	330	661
Asignación	A2	A2	F6	F6	F6	F6			

Ejercicio de aplicación 3.3

Selección de rutas para bienstarina:

Tabla 4.5. Costos de transporte marítimo

Puerto origen	Línea marítima	Puerto destino	CEDI	Costo (COP)
Bremen	Hapagy	Cartagena	Finca Ubo	520 049 850
Hamburgo	Marsk	Buenaventura	Cali	929 931 689
Hamburgo	Marsk	Buenaventura	Pereira	902 315 431
Bremen	Hapagy	Cartagena	Inírida	622 661 576
Bremen	Hapagy	Cartagena	Santa Marta	195 652 769
Hamburgo	Marsk	Buenaventura	Villavicencio	741 999 436

Selección de rutas para palomitas de maíz:

Tabla 4.6. Costos de transporte terrestre

Puerto destino	CEDI	Costo (COP)
Cartagena	Finca Ubo	310 587 438
Buenaventura	Cali	563 976 900
Buenaventura	Pereira	545 577 096
Buenaventura	Inírida	368 522 321
Cartagena	Santa Marta	112 527 081
Buenaventura	Villavicencio	442 687 144

Ejercicio de aplicación 3.4

Tabla 4.7. Cantidades y costos de inventarios

Letra	Ubicación	Q (und)	Costo (COP)
HZ	Usaquén	1811	30 560 292
A	Engativá	64	6 075 886
B	Kennedy	258	8 159 857
C	Suba	503	27 264 844
D	Chapinero	97	6 222 315
E	Bosa	76	2 565 962
F	Soacha	487	11 369 784
G	Usme	131	14 517 222

Ejercicio de aplicación 3.5

Rutas obtenidas:

HZ – F – G – E – D – A – HZ

HZ – B – C – HZ

Ejercicio de aplicación 3.6

Tabla 4.8. Índices COI

Producto	COI
Arroz	0,5000
Lentejas	0,4000
Frijol	0,0667
Atún	0,0750
Galletas	0,3750
Harina maíz	2,0000
Café	0,3036

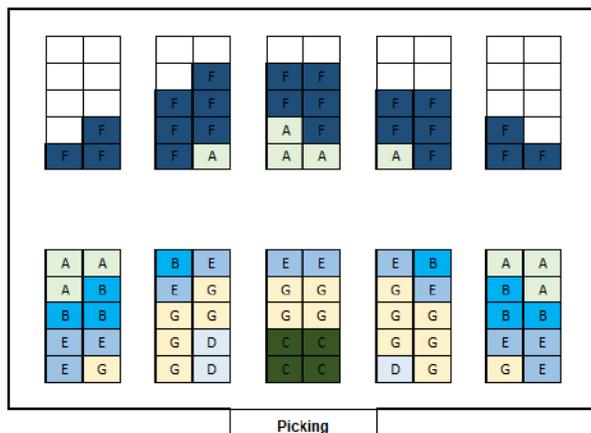


Figura 4.2. Organización de la bodega.

Referencias

- Ballou, R. H. (2004). *Logística. Administración de la cadena de suministro* (5.ª ed.). Pearson Educación.
- Baumann, J. (s. f.). *Warehouse-planner*. Consultado el 17 de abril de 2020. <https://www.warehouse-planner.com/>
- Bonet-Morón, J. A., Ricciulli-Marín, D., Pérez-Valbuena, G. J., Galvis-Aponte, L. A., Haddad, E. A., Araújo-Junior, I. F. & Perobelli, F. S. (2020). *Impacto económico regional del COVID-19 en Colombia: un análisis insumo-producto*. Documento de Trabajo sobre Economía Regional y Urbana, n.º 288. Banco de la República. <https://doi.org/10.32468/dtseru.288>
- Casselmann, B. & Schwartz, N. D. (2020, 2 de julio). After June job gains, still a 'deep hole,' and new worries. *The New York Times*.

- FlyBox. (s. f.). *Impuestos*. Latin Logistics; Deprisa. Consultado el 17 de abril de 2020. <https://www.flybox.co/Paginas/Impuestos.aspx>
- Google Maps. (s. f.). *Mapa de Bogotá, Colombia*. Consultado el 17 de abril de 2020. <https://bit.ly/2QaB2Cp>
- Hougardy, S. (2010). The Floyd–Warshall algorithm on graphs with negative cycles. *Information Processing Letters*, 110(8-9), 279-281. <https://doi.org/10.1016/j.ipl.2010.02.001>
- Jaramillo, I. (2020, 1 de julio). Una vacuna contra el desempleo. *Portafolio*. <https://bit.ly/3vc9xqV>
- Nicola, M., Alsafi, Z., Sohrabi, C., Kerwan, A., Al-Jabir, A., Iosifidis, C., Agha, M. & Agha, R. (2020). The socio-economic implications of the coronavirus and COVID-19 pandemic: a review. *International Journal of Surgery*, 78, 185-193. <https://doi.org/10.1016/j.ijssu.2020.04.018>
- SeaRates. (s. f.). *Servicios*. DP World. Consultado el 17 de abril de 2020. <https://www.searates.com/es/services/distances-time/>
- Sociedad Portuaria Regional de Buenaventura S. A. (2013). *Tarifas portuarias*. <https://bit.ly/2P3Uoby>
- Sociedad Portuaria Regional de Cartagena S. A. (s. f.). *Tarifas SPRC*. Consultado el 17 de abril de 2020. <https://bit.ly/3goVaLF>



La preparación editorial de *Investigación de operaciones y logística* estuvo a cargo de Ediciones Universidad Central.

En la composición del texto se utilizaron las fuentes Minion Pro, Glypha LT Std, Cronos Pro y Serifa Std.
Se publicó en diciembre de 2021, en la ciudad de Bogotá.

El objetivo de este libro es brindar ejercicios prácticos y herramientas a los estudiantes, profesores y profesionales de la ingeniería industrial y de cualquier otra área que deseen ampliar su conocimiento y entrenar sus capacidades de modelamiento matemático en algunas áreas de la investigación de operaciones y la logística, de manera que puedan hacer frente a las problemáticas actuales.

Este libro nació de la coyuntura de varios factores. En principio, la experiencia docente de sus autores les ha permitido compilar un conjunto de ejercicios y casos como apoyo didáctico. Por otro lado, ante la situación actual de la pandemia, se busca ofrecer herramientas para apoyar la toma de decisiones basadas en la evidencia formal de las matemáticas y la ciencia en general. Asimismo, sus autores desean brindar un acercamiento a temáticas como la programación lineal, las cadenas de Markov, la heurística y los algoritmos en la logística, de manera que distintos actores de los sectores público y privado puedan comprender y aprovechar el alcance de las aplicaciones.

Así, se ha diseñado un libro enfocado en la práctica y aplicación de conceptos a partir de casos asociados a la pandemia que están viviendo los gobiernos, las empresas y la población en general. Sin embargo, aunque creado en el contexto actual de pandemia, este libro también pretende ser una herramienta accesible a todo público que quiera mejorar sus habilidades en pensamiento lógico crítico, modelamiento matemático, interpretación de resultados y toma de decisiones en diferentes situaciones.



UNIVERSIDAD
CENTRAL